

MACCHINE ELETTRICHE

**Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica
Anno Accademico 2015-2016**

Macchina asincrona

**Docente Prof. Francesco Benzi
Università di Pavia
e-mail: francesco.benzi@unipv.it**

Macchina asincrona

Realizzato per la prima volta da Galileo Ferraris nel 1885.



Attualmente il mercato italiano dei motori elettrici in bassa tensione è indicativamente così suddiviso (statistiche ANIE 2000-2004) :

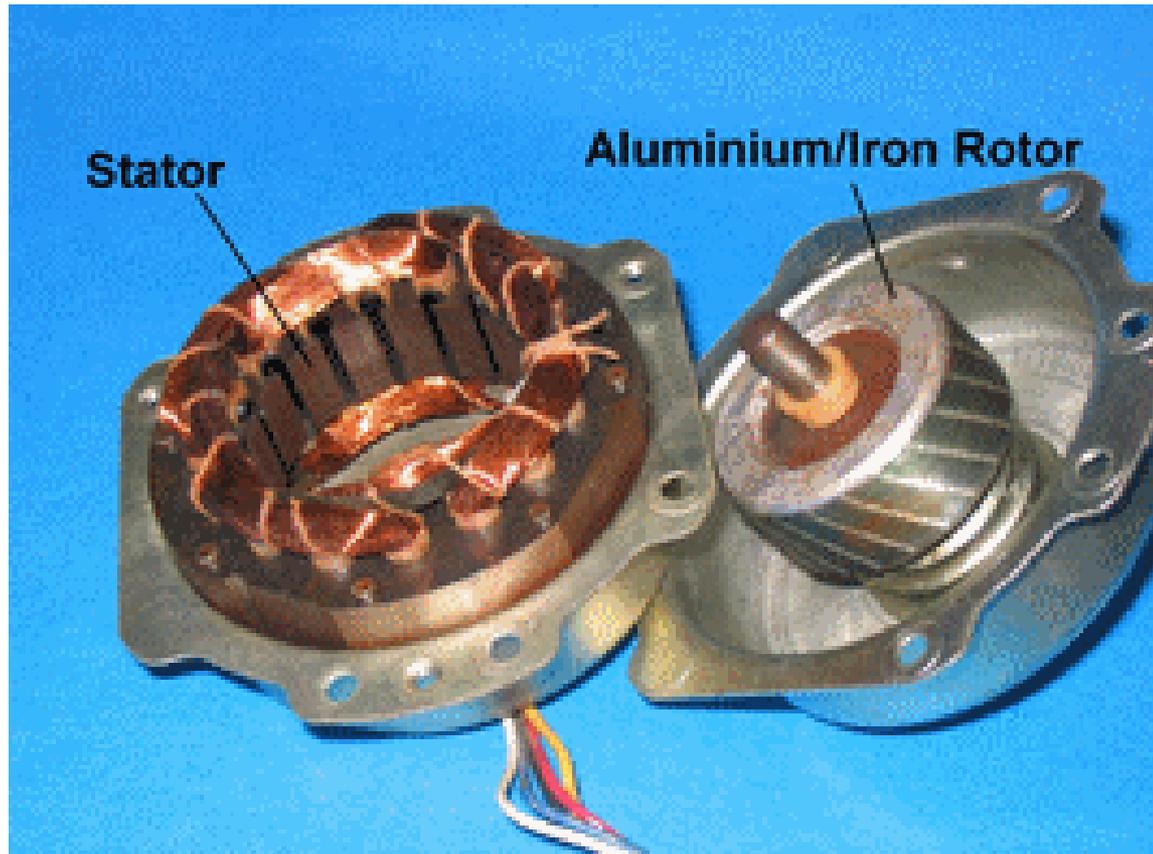
- Motori Asincroni Trifasi 80%
- Motori Brushless 16%
- Motori in Corrente Continua 4%

Macchina asincrona

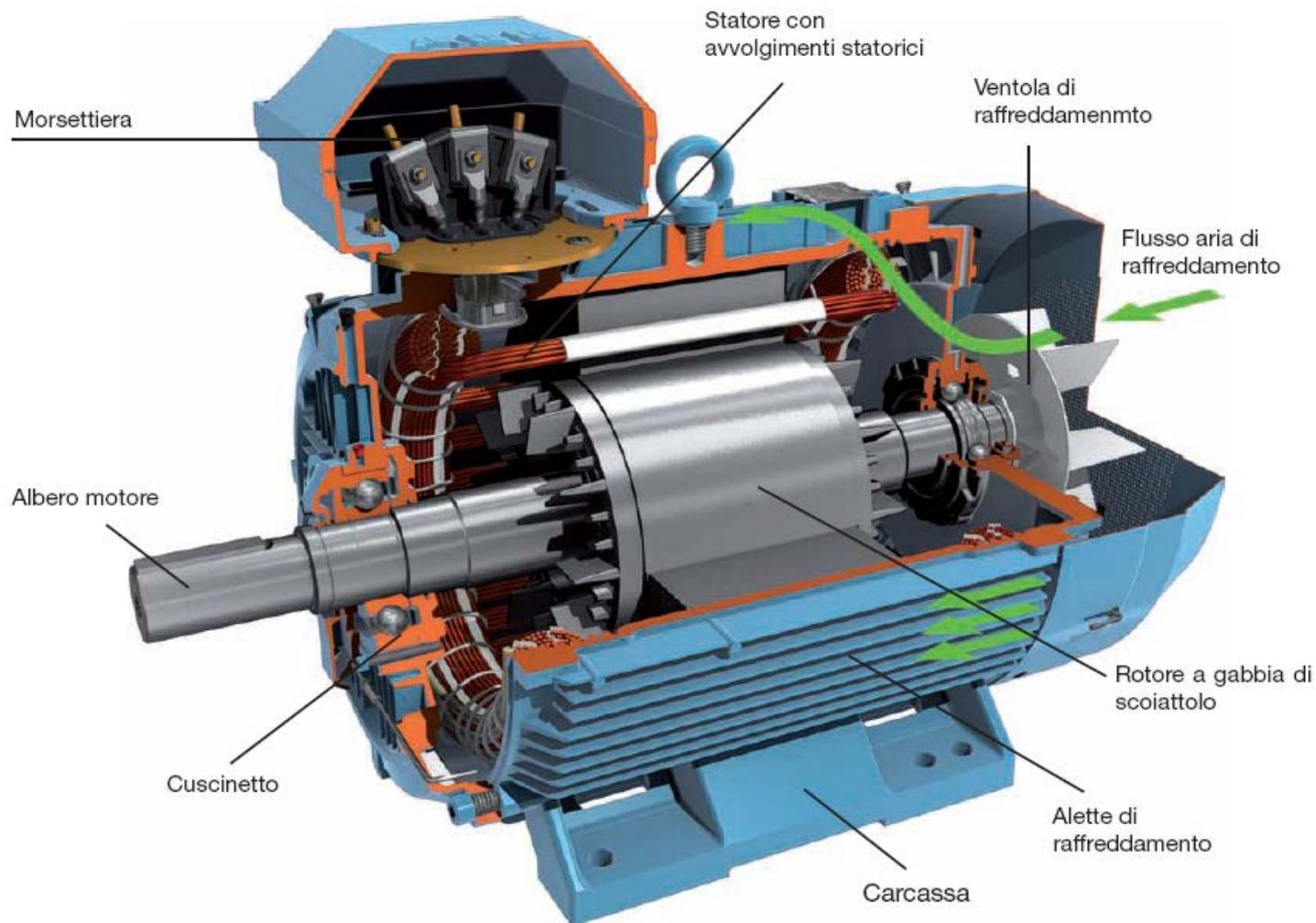


Macchina asincrona, 4700 kW, 10000 V, 4 poli

Macchina asincrona



Macchina asincrona



Macchina asincrona, spaccato

Macchina asincrona

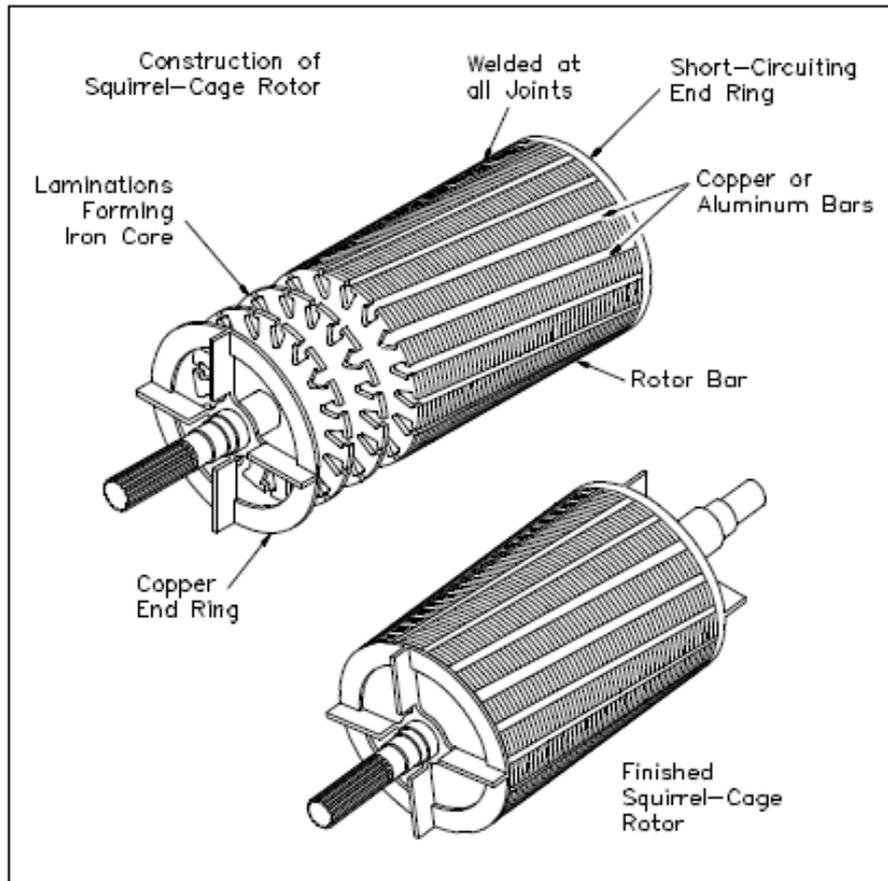
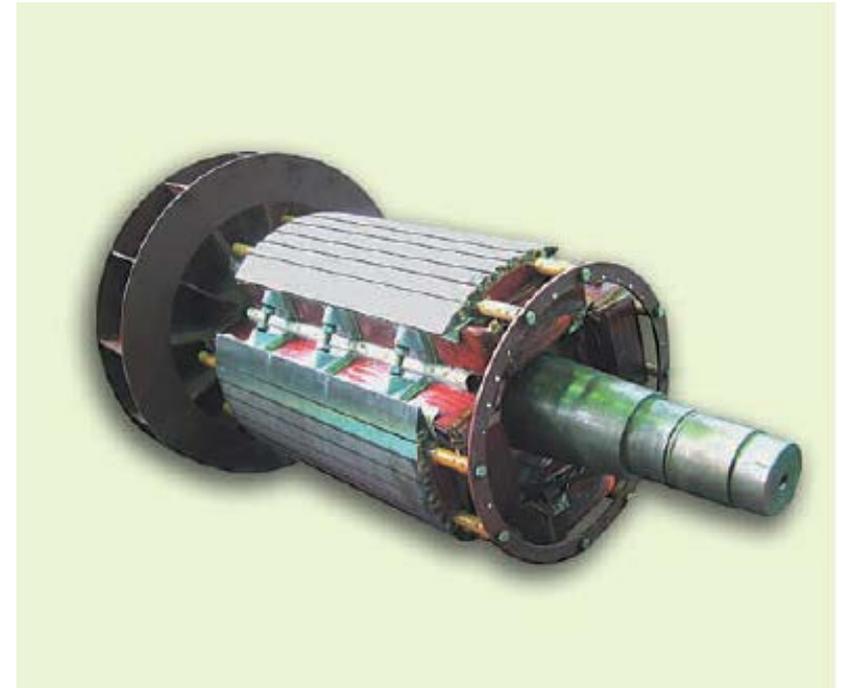
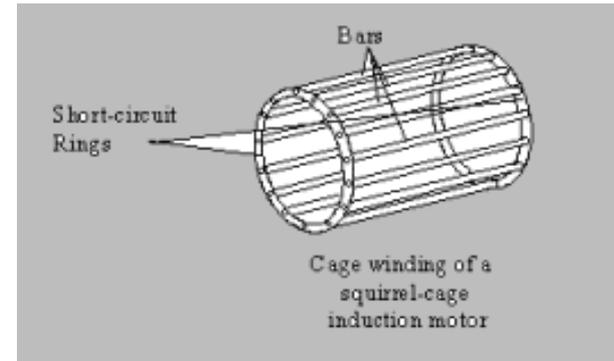
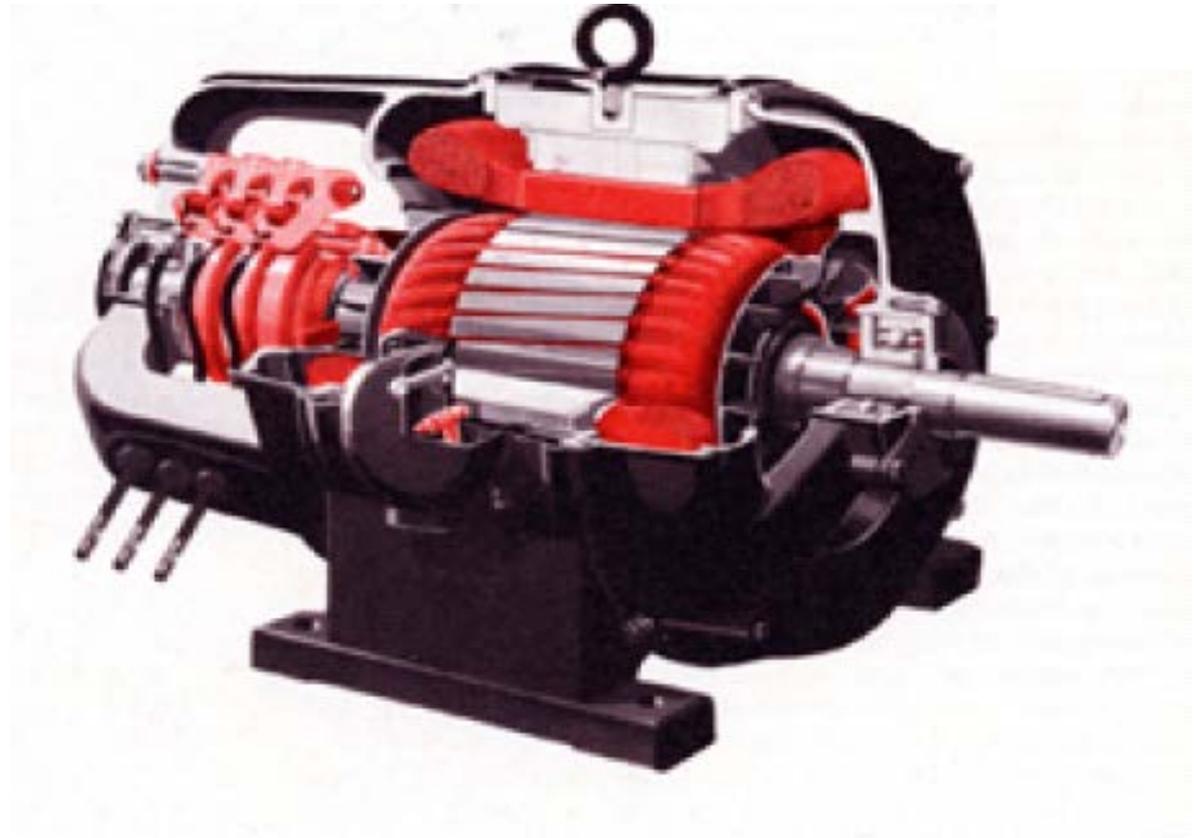


Figure 5 Squirrel-Cage Induction Rotor



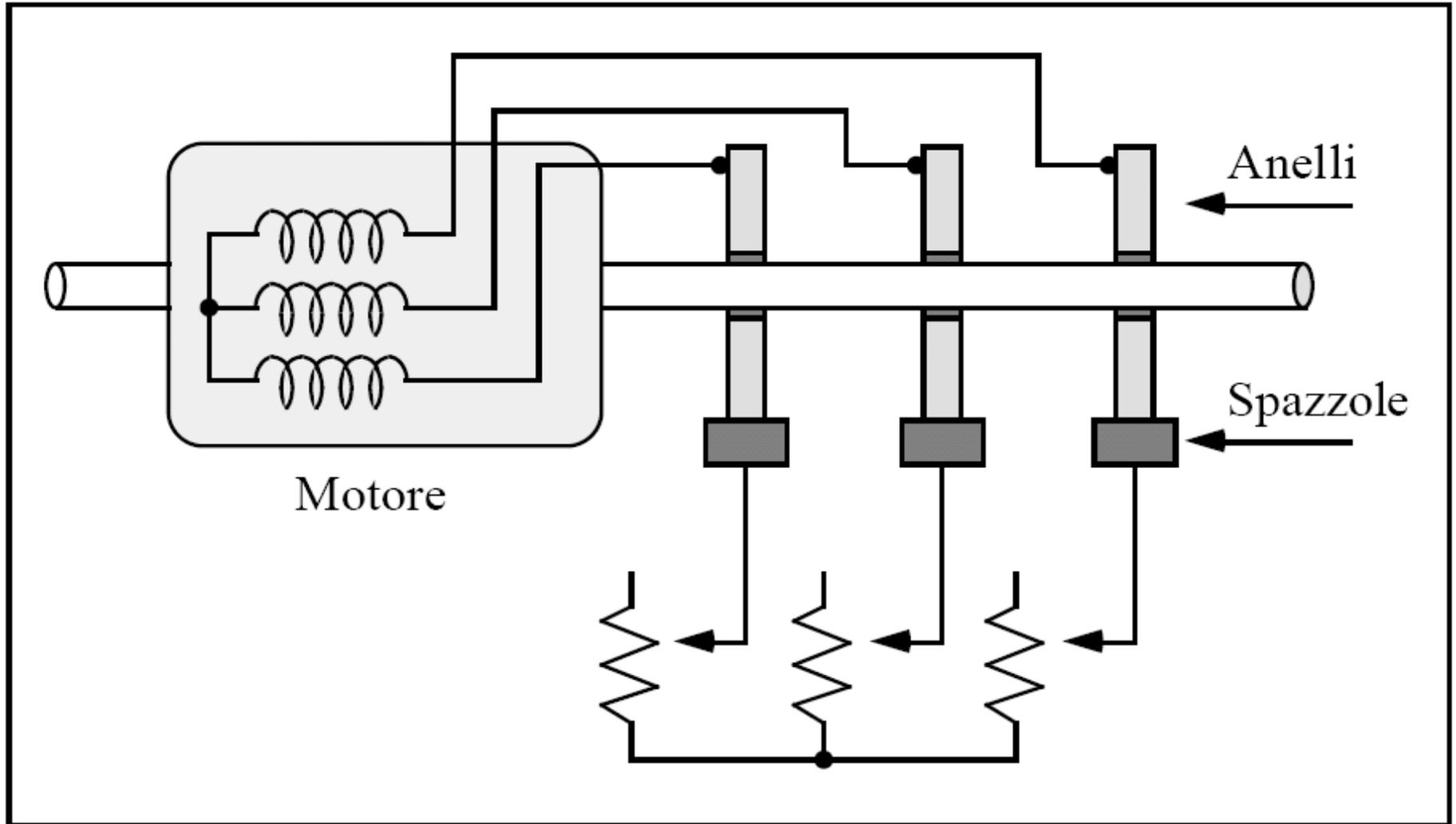
Rotore a gabbia di scoiattolo

Macchina asincrona



Rotore avvolto

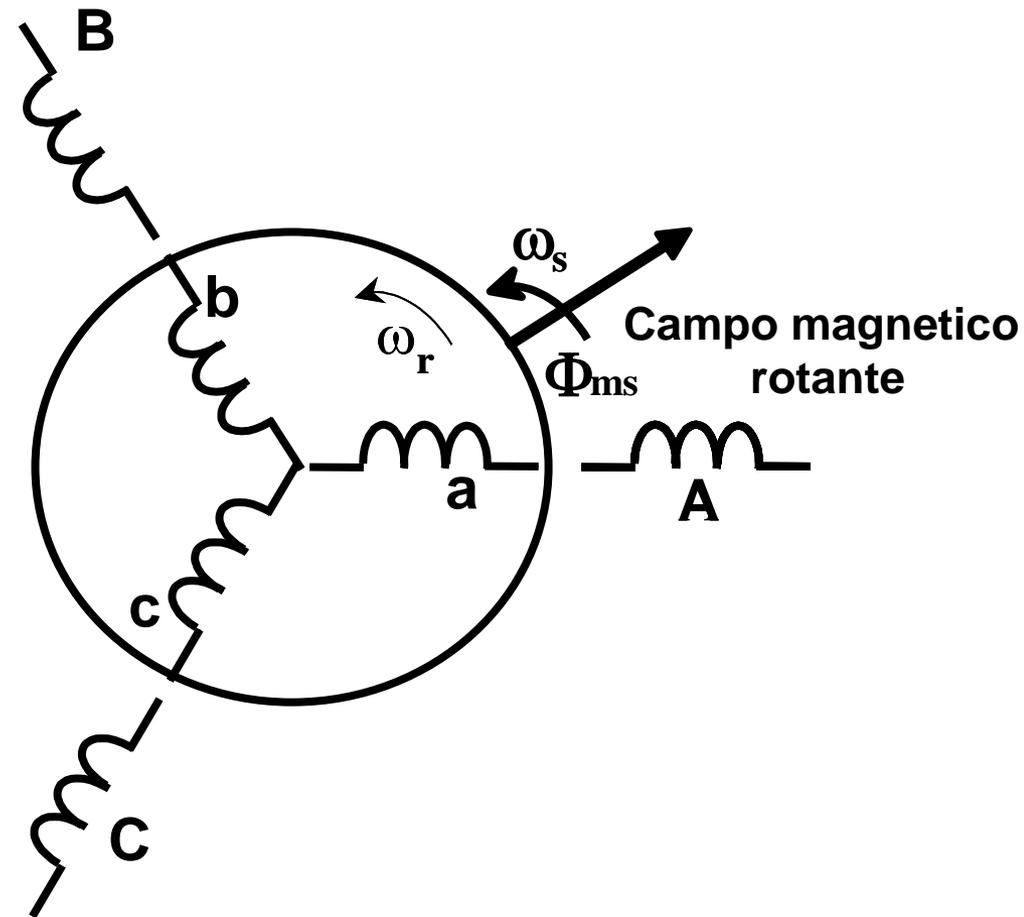
Macchina asincrona



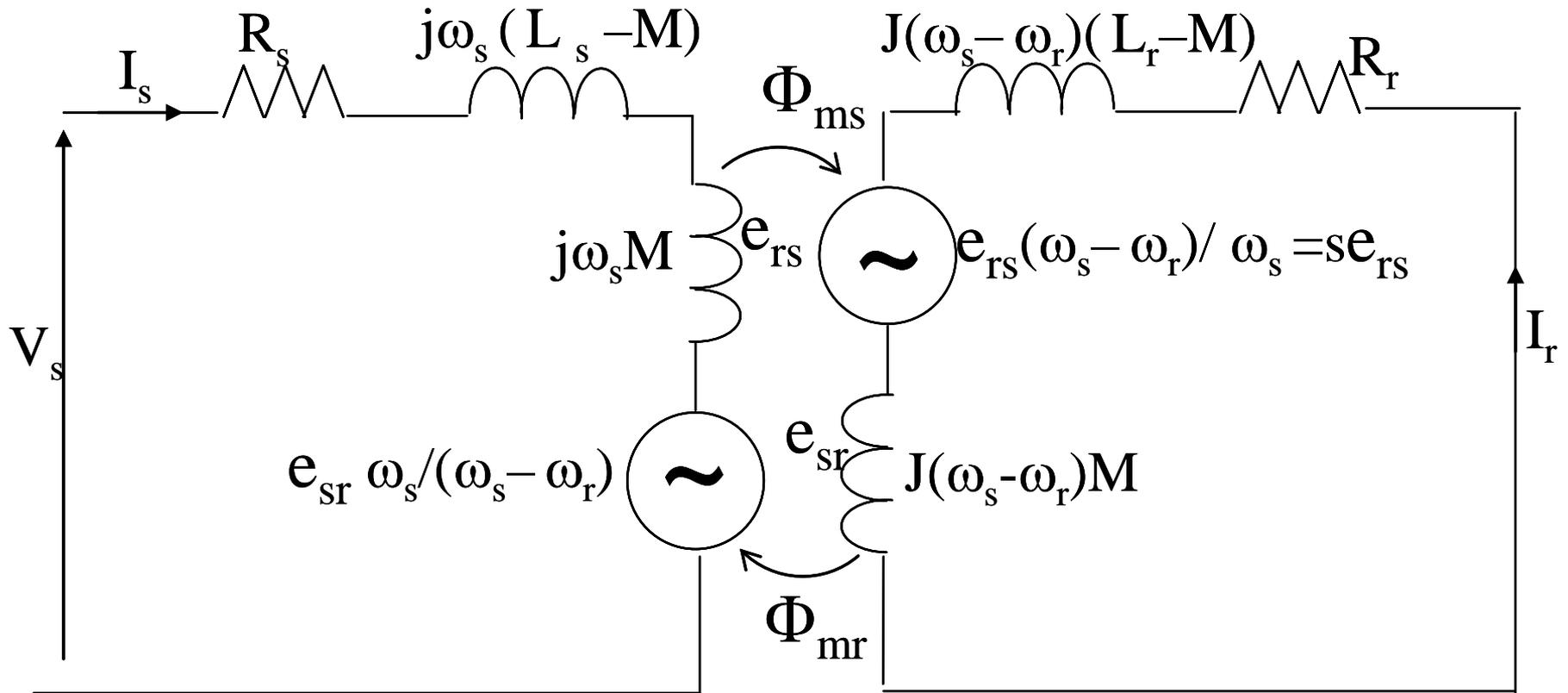
Rotore avvolto

Circuito equivalente della macchina asincrona

- Macchina asincrona trifase
- Costruzione simmetrica
- Alimentazione simmetrica equilibrata
- Funzionamento a regime alternato sinusoidale
- Si considera il circuito equivalente per fase



Circuito equivalente di una singola fase



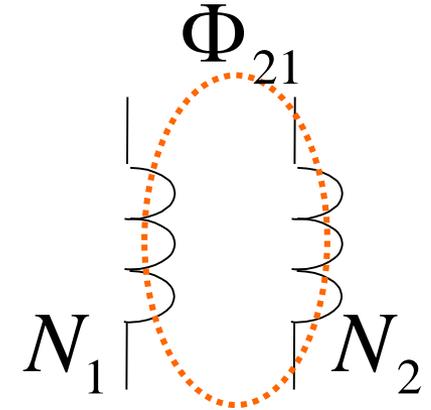
Il circuito è riferito allo statore

Rapporto spire unitario $\Rightarrow L_{ls} = L_s - M$

Rapporto spire unitario $\Rightarrow L_{ls} = L_s - M$

$$L_1 = L_{\ell 1} + L_{m1} = \frac{N_1 \Phi_{\ell 1}}{i_1} + \frac{N_1 \Phi_{m1}}{i_1}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$



Se: $N_1 = N_2 \Rightarrow L_m = M_{21} = M$

$$L_1 = L_{\ell 1} + M$$

Equazioni di una fase

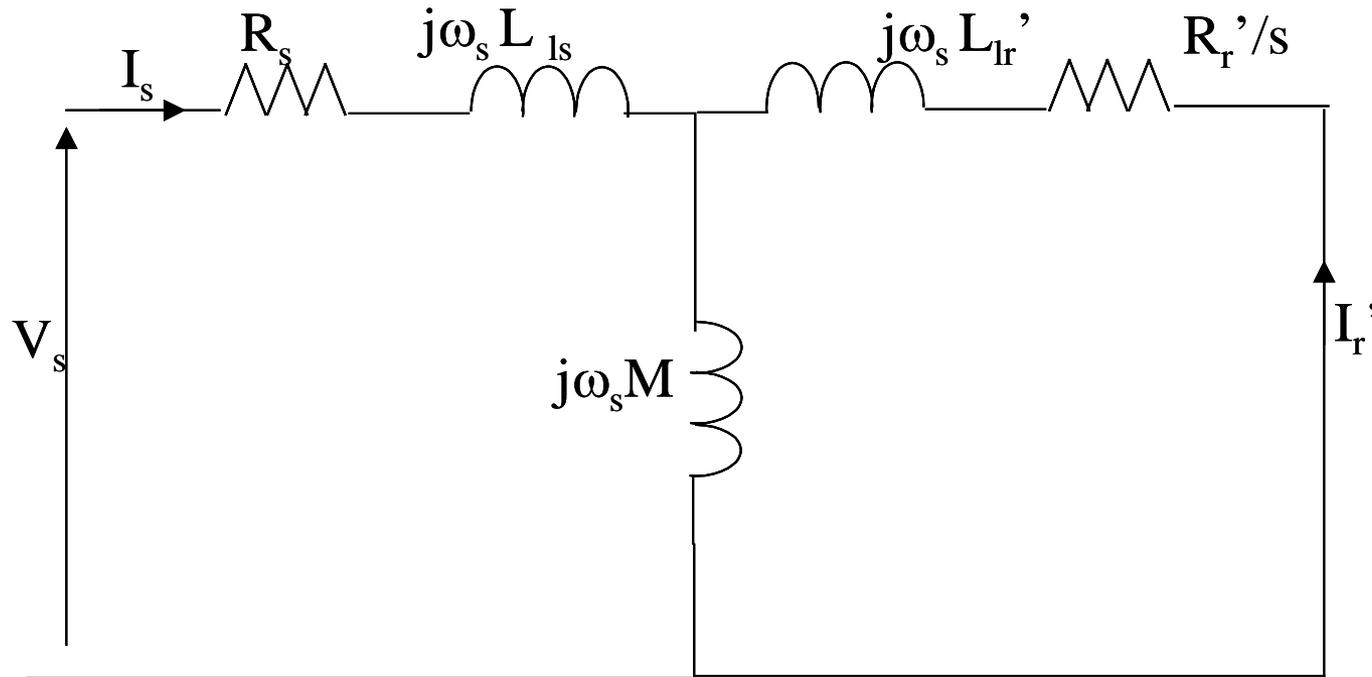
$$\begin{cases} v_s = [R_s + j\omega_s(L_s - M)]I_s + j\omega_s MI_s + j\omega_s MI_r \\ 0 = [R_r + j(\omega_s - \omega_r)(L_r - M)]I_r + j(\omega_s - \omega_r)MI_r + j(\omega_s - \omega_r)MI_s \end{cases}$$

Dividendo per $s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s}$

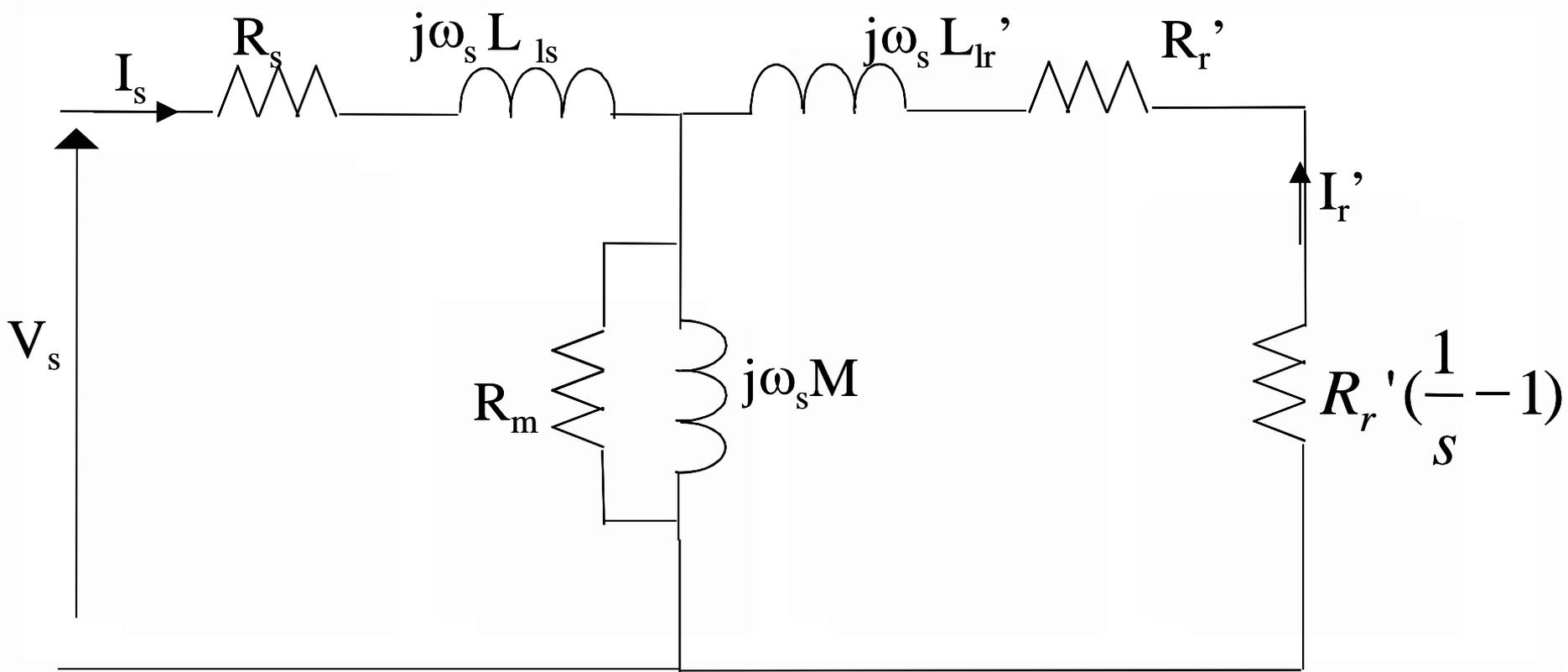
$$\begin{cases} v_s = [R_s + j\omega_s(L_s - M)]I_s + j\omega_s MI_s + j\omega_s MI_r \\ 0 = \left[\frac{R_r}{s} + j\omega_s(L_r - M) \right] I_r + j\omega_s MI_r + j\omega_s MI_s \end{cases}$$

Circuito equivalente (2)

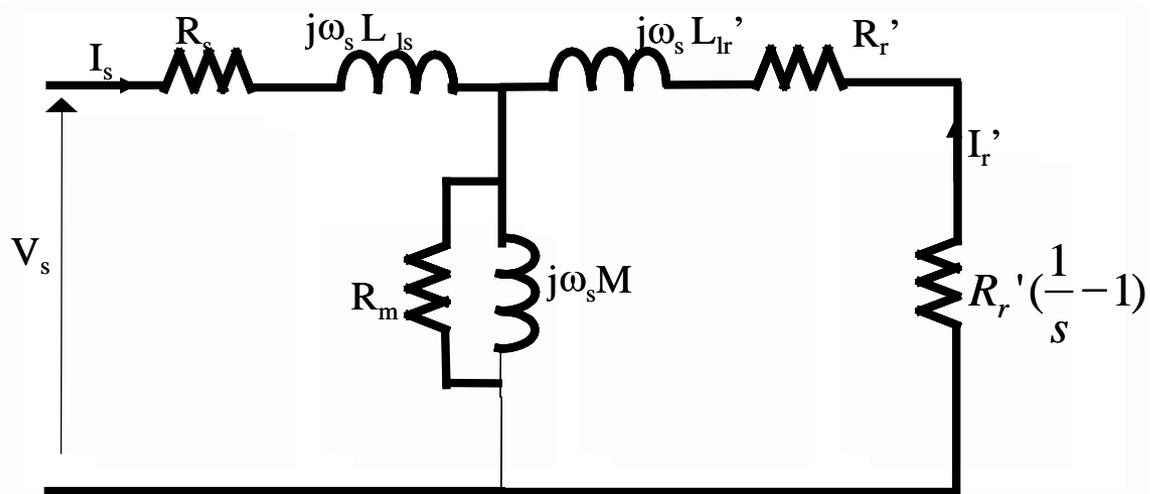
$$\begin{cases} v_s = [R_s + j\omega_s L_{ls}] I_s + j\omega_s M I_s + j\omega_s M I_r' \\ 0 = \left[\frac{R_r'}{s} + j\omega_s L_{lr}' \right] I_r' + j\omega_s M I_r' + j\omega_s M I_s \end{cases}$$



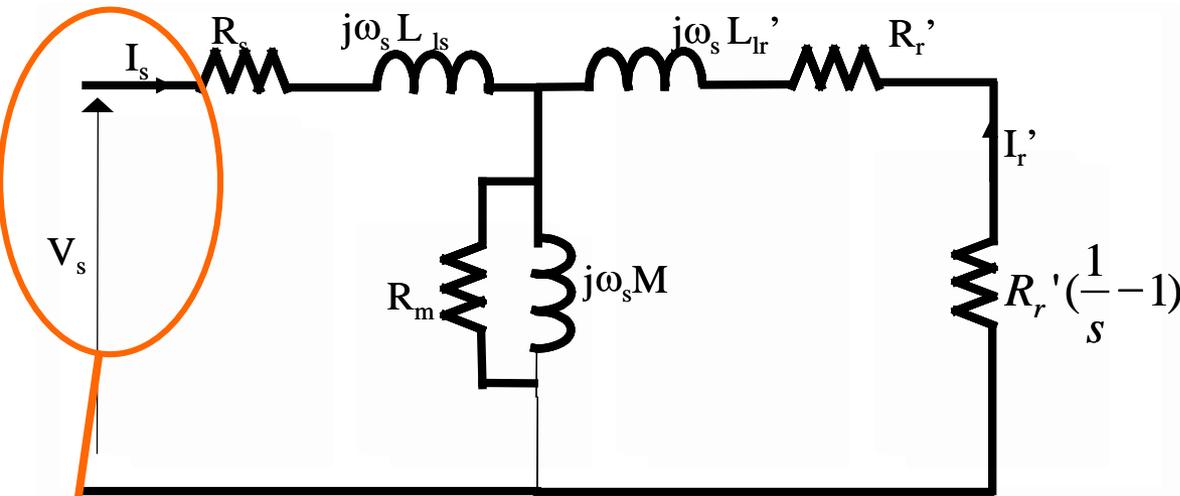
Circuito equivalente (3)



Significato dei parametri del circuito equivalente

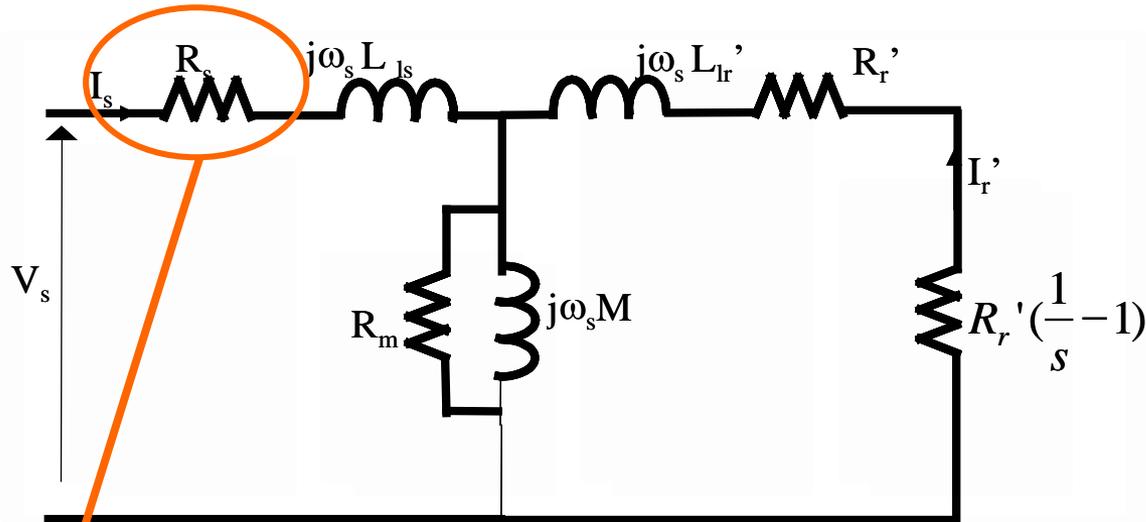


Significato dei parametri del circuito equivalente



V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

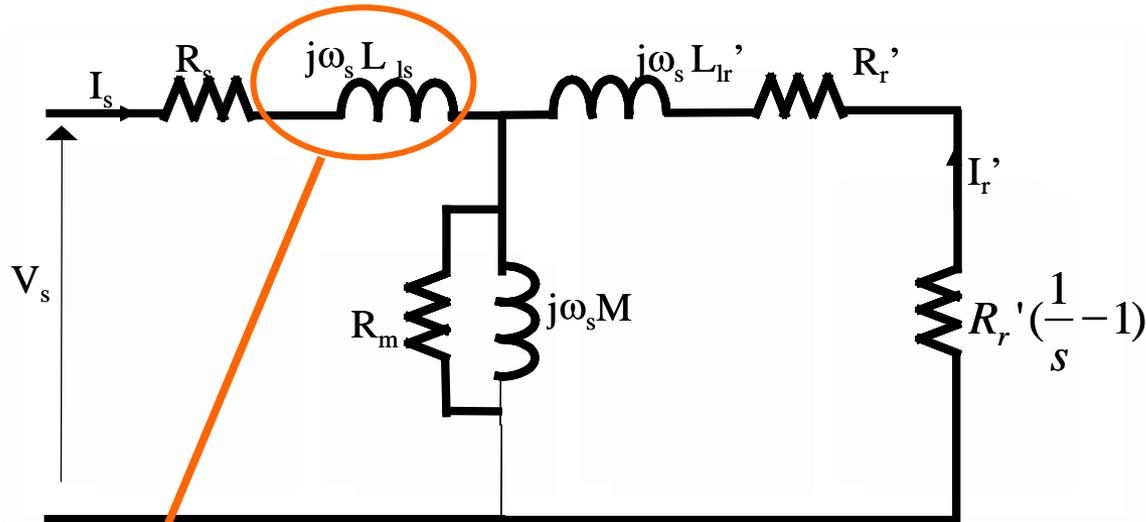
Significato dei parametri del circuito equivalente



V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

Significato dei parametri del circuito equivalente

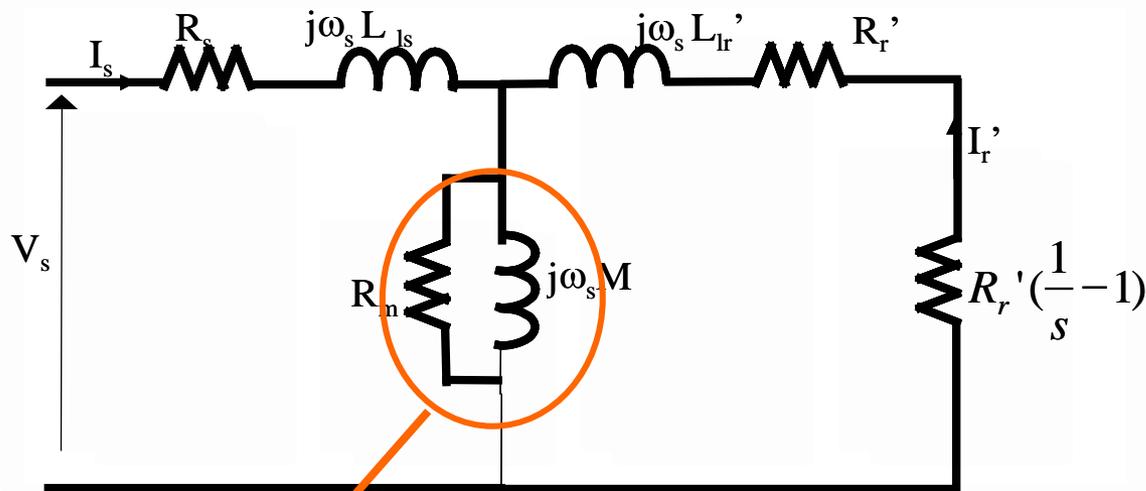


V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

L_{ls} Induttanza relativa al flusso disperso statorico

Significato dei parametri del circuito equivalente



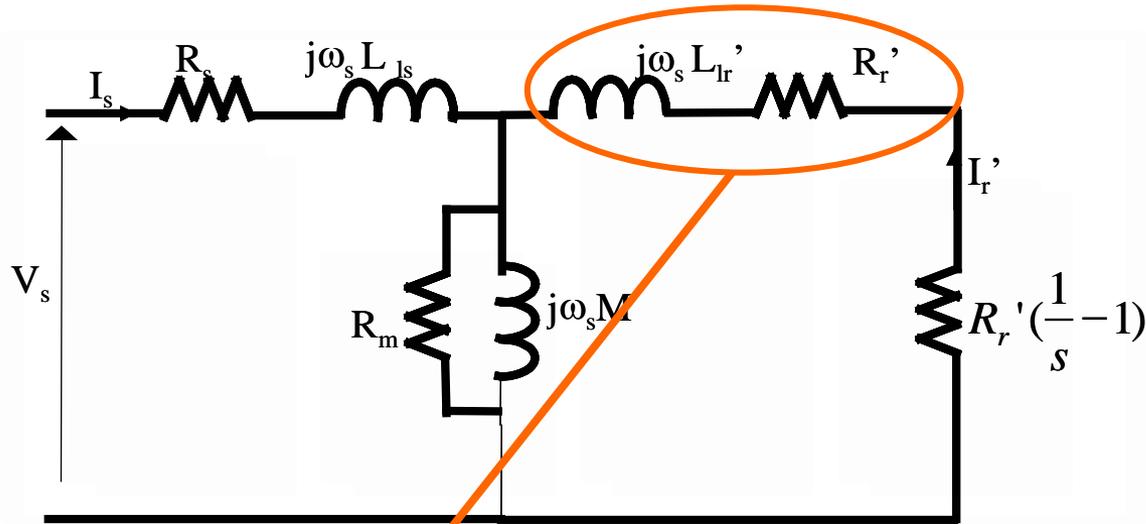
V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

L_{ls} Induttanza relativa al flusso disperso statorico

R_m, M Ramo magnetizzante ($3R_m I_m^2$ Perdite nel ferro)

Significato dei parametri del circuito equivalente



V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

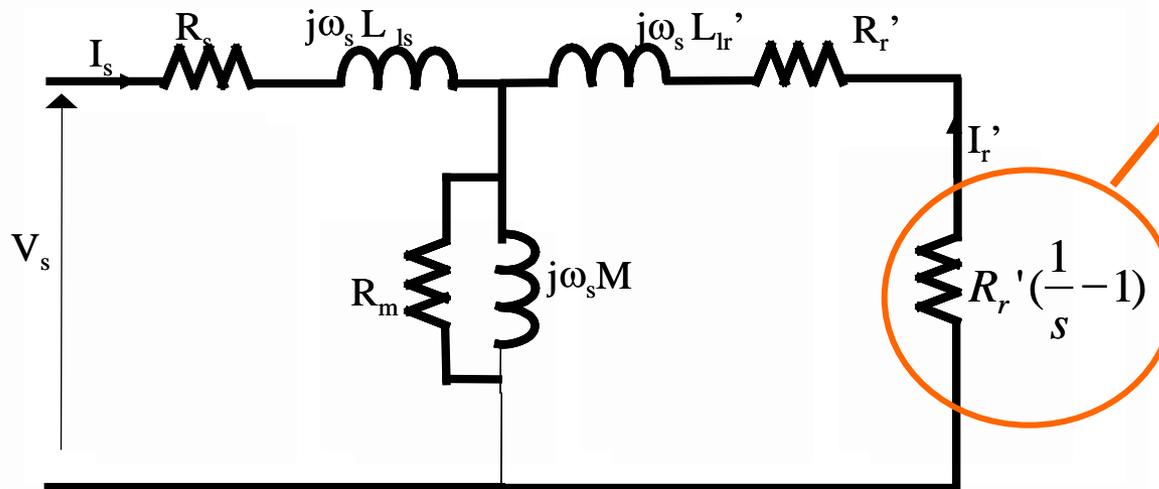
R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

L_{ls} Induttanza relativa al flusso disperso statorico

R_m, M Ramo magnetizzante ($3R_m I_m^2$ Perdite nel ferro)

R_r', L_{lr}' Impedenza di rotore riportate allo statore

Significato dei parametri del circuito equivalente



Parametro meccanico

$3R_r' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_r'^2$ Perdite nella resistenza rappresentative della potenza meccanica totale sviluppata dalla macchina (dal bilancio di potenze) incluse le perdite meccaniche.

V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

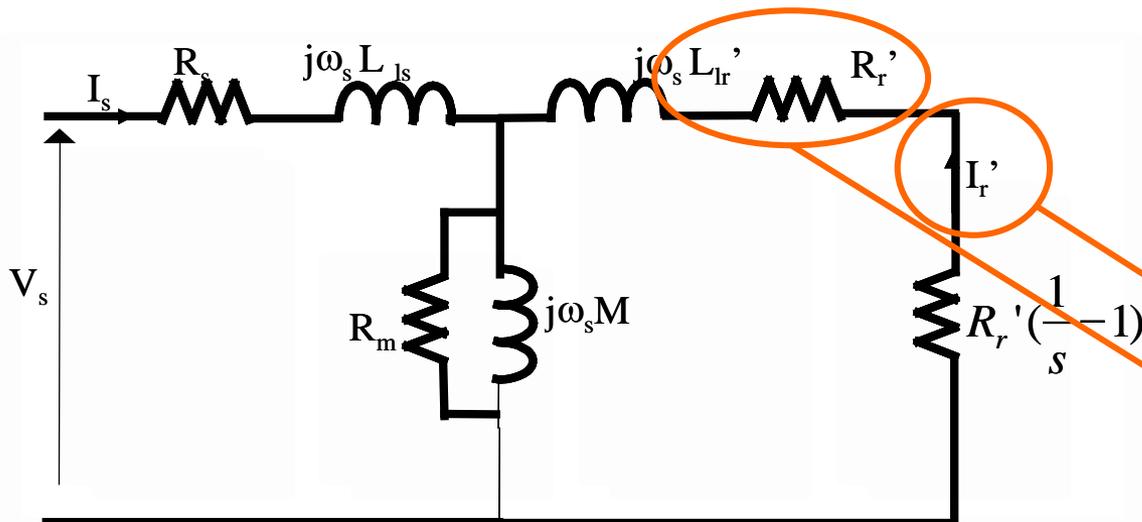
R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

L_{ls} Induttanza relativa al flusso disperso statorico

R_m, M Ramo magnetizzante ($3R_m I_m^2$ Perdite nel ferro)

R_r', L_{lr}' Impedenza di rotore riportate allo statore

Significato dei parametri del circuito equivalente



Parametro meccanico

$3R_r' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_r'^2$ Perdite nella resistenza rappresentative della potenza meccanica totale sviluppata dalla macchina (dal bilancio di potenze) incluse le perdite meccaniche.

V_s, I_s Tensione e corrente di statore per fase

R_s Resistenza statorica ($3R_s I_s^2$ Perdite conduttori statore)

L_{ls} Induttanza relativa al flusso disperso statorico

R_m, M Ramo magnetizzante ($3R_m I_m^2$ Perdite nel ferro)

R_r', L_{lr}' Impedenza di rotore riportate allo statore

$I_r', R_r' \dots$ Grandezze rotoriche riportate allo statore mediante il rapporto spire (rotore avvolto), o il rapporto di trasformazione delle tensioni (rotore a gabbia)

Definizione di scorrimento di una macchina asincrona

Scorrimento s di una macchina asincrona è il rapporto fra *velocità relativa del campo rotante di statore rispetto alla velocità meccanica di rotore* e

velocità del campo rotante di statore

$$s = \frac{\omega - \omega_m}{\omega} \quad \frac{[rad / s]}{[rad / s]}$$

Lo scorrimento è indipendente dall'unità di misura scelta purché sia usata coerentemente:

$$s = \frac{n - n_m}{n} \frac{[giri / min]}{[giri / min]}; \quad s = \frac{f - f_m}{f} \frac{[Hz]}{[Hz]}$$

Definizione di scorrimento di una macchina asincrona

Lo scorrimento può essere definito in termini di pulsazioni e frequenze elettriche. In questo caso la velocità meccanica di rotore deve essere riportata al suo equivalente elettrico attraverso (pp)

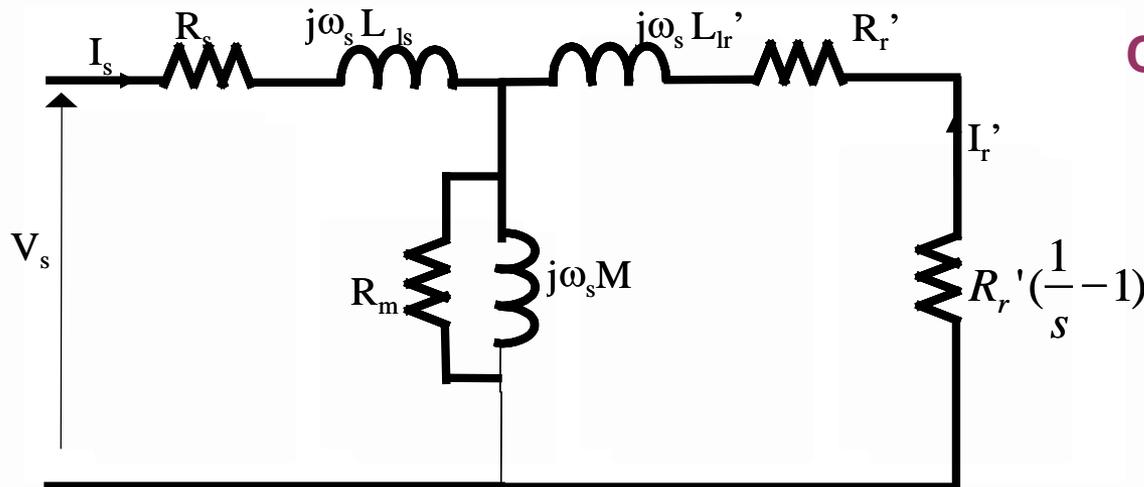
$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r \text{ [rad / s]}}{\omega_1 \text{ [rad / s]}}; \quad \omega_1 \text{ pulsazione elettrica di statore}$$

$\omega_r = \omega_m \cdot (pp)$ velocità di rotore in termini elettrici

$$\omega_1 - \omega_r = \omega_2 \text{ frequenza delle grandezze elettriche di rotore}$$

$$\omega_2 = s \cdot \omega_1 \text{ frequenza delle grandezze elettriche di rotore}$$

Potenza e coppia nella macchina asincrona



Circuito equivalente per fase

Potenza meccanica totale

$$P_m = 3 R_r' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \cdot I_r'^2$$

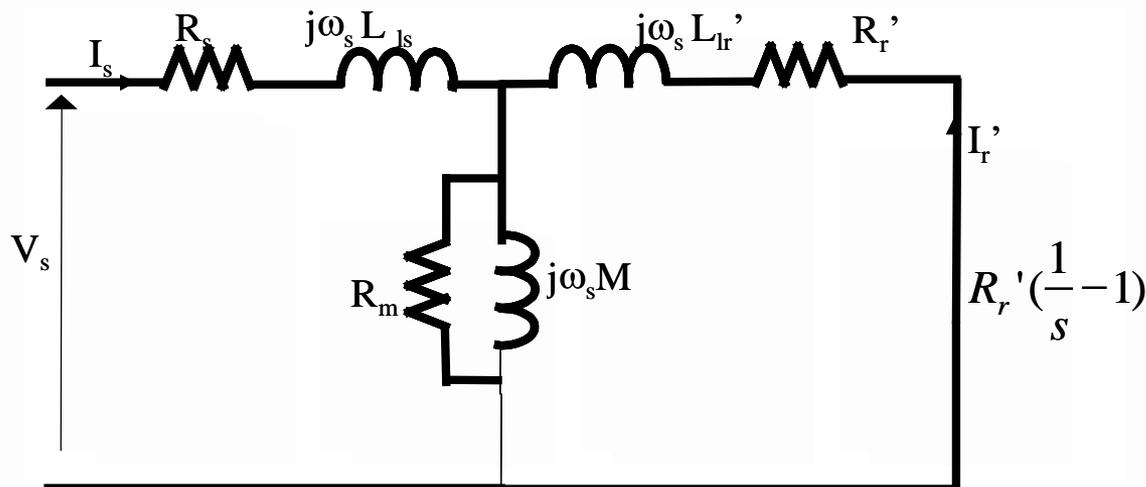
Potenza elettromagnetica (Funzionamento a regime !)

$$C_e = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{3 R_r' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \cdot I_r'^2}{\omega_r / (pp)} = \frac{3 R_r' \left(\frac{1-s}{s} \right) \cdot I_r'^2}{\omega_1 (1-s) / (pp)} = \frac{3 (pp) R_r'}{3_1} I_r'^2$$

La Coppia dipende dallo scorrimento, ovvero dalle condizioni di funzionamento.

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Macchina allo spunto ($\omega_r = 0$; $s=1$)



Allo spunto la macchina è alimentata, ma non ancora in movimento. Non è una condizione di regime, ma si può pensare tale se si immagina di bloccare (frenare) il rotore per un tempo sufficiente a stabilire un regime elettrico.

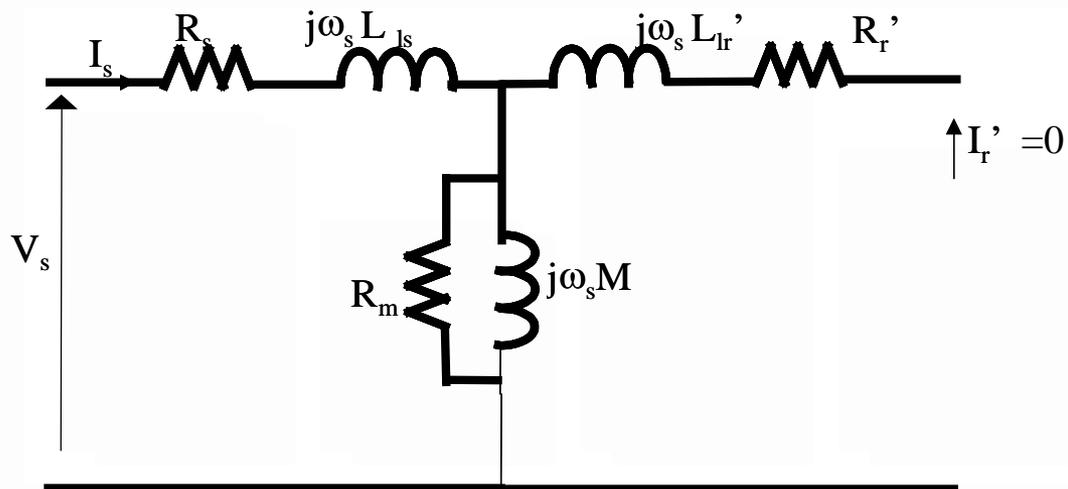
$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} = 1$$

$$C_e = \frac{3(p)R_r'}{3} I_r'^2 > 0 ; \omega_m = 0 ; P_m = C_e \cdot \omega_m = 0$$

- La coppia allo spunto è diversa da zero (**macchina autoavviante**).
- La velocità è nulla, e così la potenza meccanica convertita.
- L'impedenza sul lato rotorico è minima e si ha quindi un **assorbimento elevato di corrente**.

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Macchina a vuoto ($\omega_r = \omega_1$; $s=0$)



A vuoto completo (condizione solo ideale) la coppia resistente è nulla e la velocità quella di sincronismo

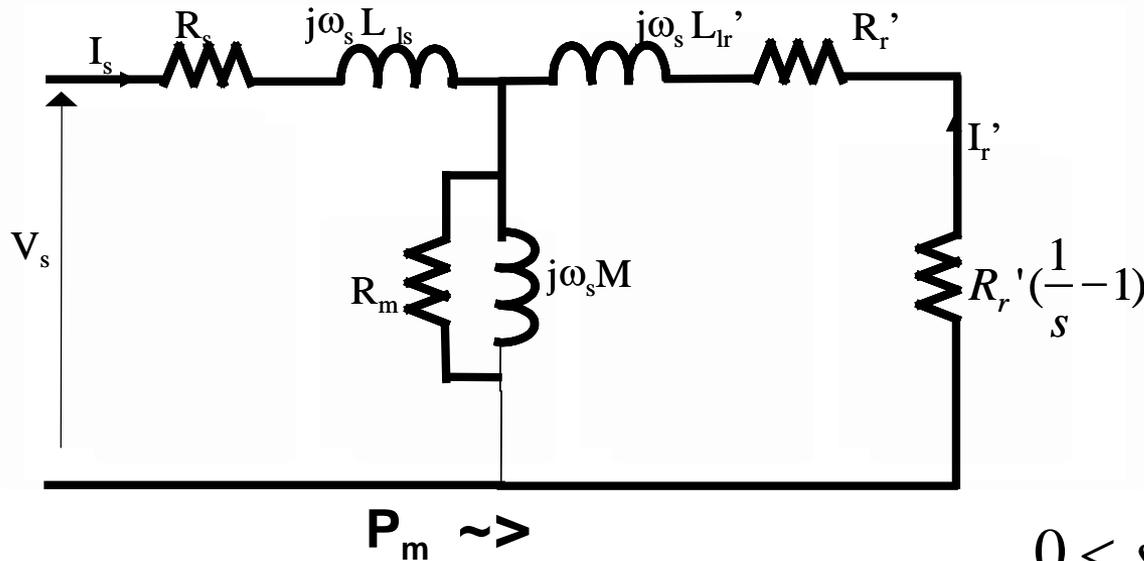
$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} = 0$$

$$C_e = \frac{3(p_p)R_r'}{3_1} I_r'^2 = 0; \quad \omega_m = \frac{\omega_1}{(pp)}; \quad P_m = C_e \cdot \omega_m = 0$$

- La coppia a vuoto è nulla.
- La velocità è massima nel funzionamento da motore e pari a quella di sincronismo.
- L'impedenza sul lato rotorico tende a infinito e la corrente di rotore è nulla.

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Funzionamento nominale ($\omega_r < \omega_1$; $0 < s < 1$)



In condizioni nominali la velocità della macchina è vicina ma inferiore a quella di sincronismo

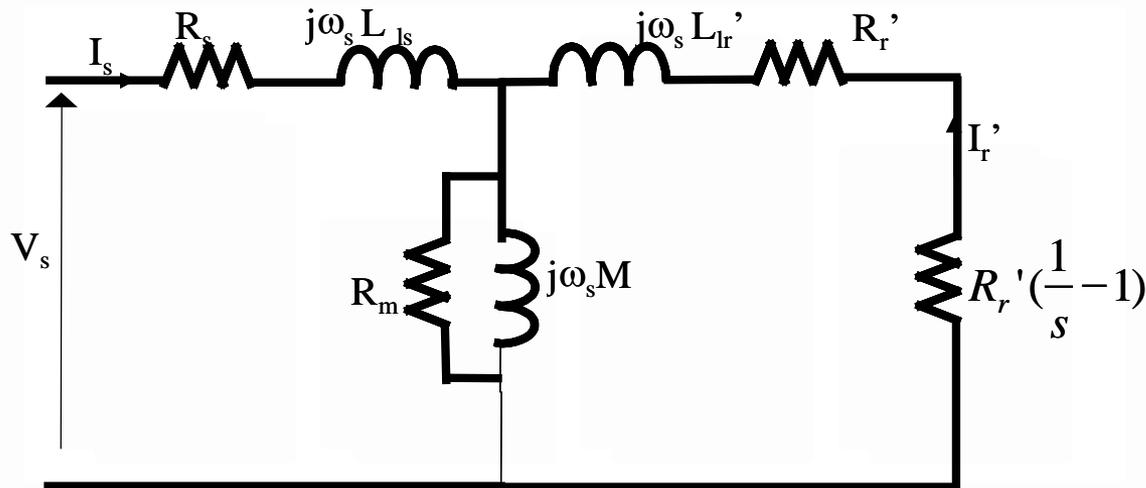
$$0 < s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} < 1$$

$$C_e = \frac{3(p_p)R_r'}{3} I_r'^2 > 0 ; \omega_m > 0 ; P_m = C_e \cdot \omega_m > 0$$

- La convenzione usata per il verso dell'energia è quella degli **utilizzatori**.
- Potenza meccanica convertita positiva significa **funzionamento da motore**.
- Valori tipici dello scorrimento vanno **da 0,05 a 0,01** (per macchine di potenza nominale crescente).

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Funzionamento da generatore ($\omega_r > \omega_1$; $s < 0$)



La velocità del rotore supera quella di sincronismo solo se esso è trascinato da un motore primo, una turbina meccanica che fa da motore primo

$\llsim P_m$

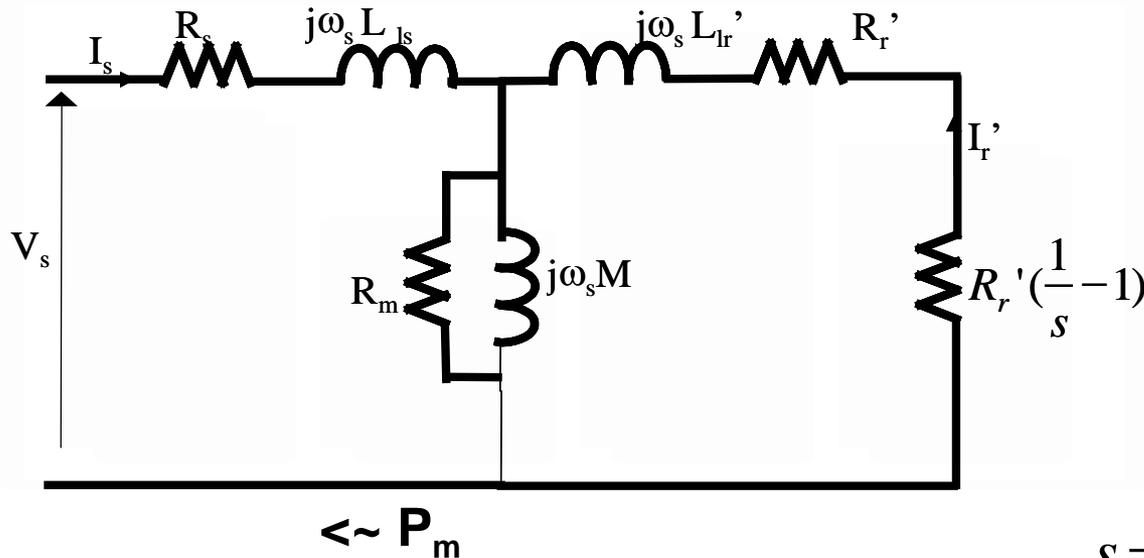
$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} < 0$$

$$C_e = \frac{3(p_p)R_r'}{3\omega_1} I_r'^2 < 0 ; \omega_m > 0 ; P_m = C_e \cdot \omega_m < 0$$

- La potenza è negativa, ovvero trasmessa dal motore primo alla rete
- La macchina deve essere comunque **collegata in rete o magnetizzata** attraverso altre sorgenti (es. condensatori) per operare da generatore
- **Il funzionamento da generatore è poco comune** per la macchina asincrona.

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Funzionamento da freno in controcampo ($\omega_r < 0$; $s > 1$)



La velocità del rotore è negativa, cioè opposta a quella del campo magnetico rotante. Questo può accadere se si invertono due fasi di alimentazione durante un funzionamento in regime da motore.

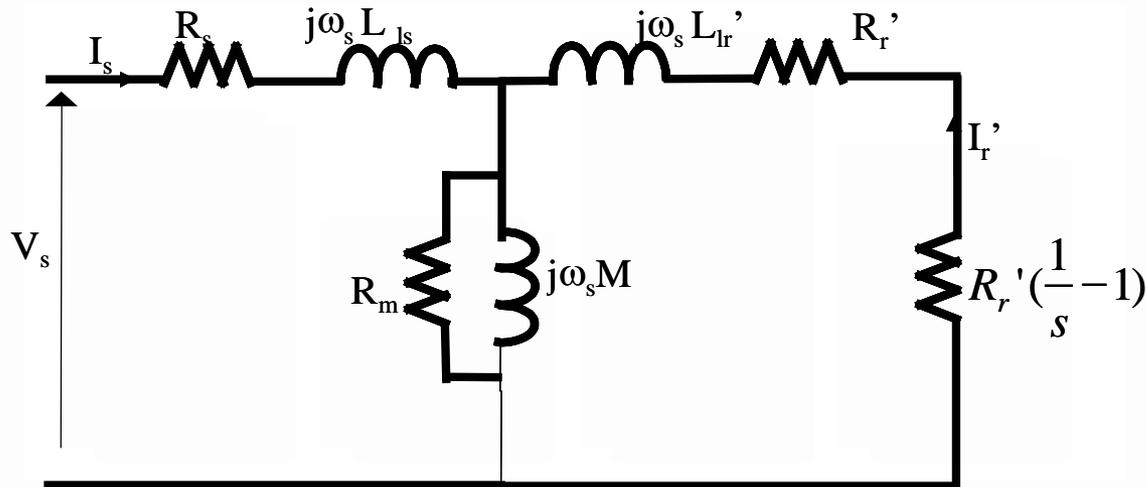
$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} > 1$$

$$C_e = \frac{3(p_p)R_r'}{3\omega_1} I_r'^2 < 0 ; \omega_m > 0 ; P_m = C_e \cdot \omega_m < 0$$

- La potenza è negativa, ovvero trasmessa dal motore primo alla rete
- La macchina deve essere comunque **collegata in rete o magnetizzata** attraverso altre sorgenti (es. condensatori) per operare da generatore
- **Il funzionamento da generatore è poco comune** per la macchina asincrona.

Potenza e coppia nella macchina asincrona

Funzionamento da generatore ($\omega_r > \omega_1$; $s < 0$)



La velocità del rotore supera quella di sincronismo solo se esso è trascinato da un motore primo, una turbina meccanica che fa da motore primo

$$\llsim P_m$$

$$s = \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_1} < 0$$

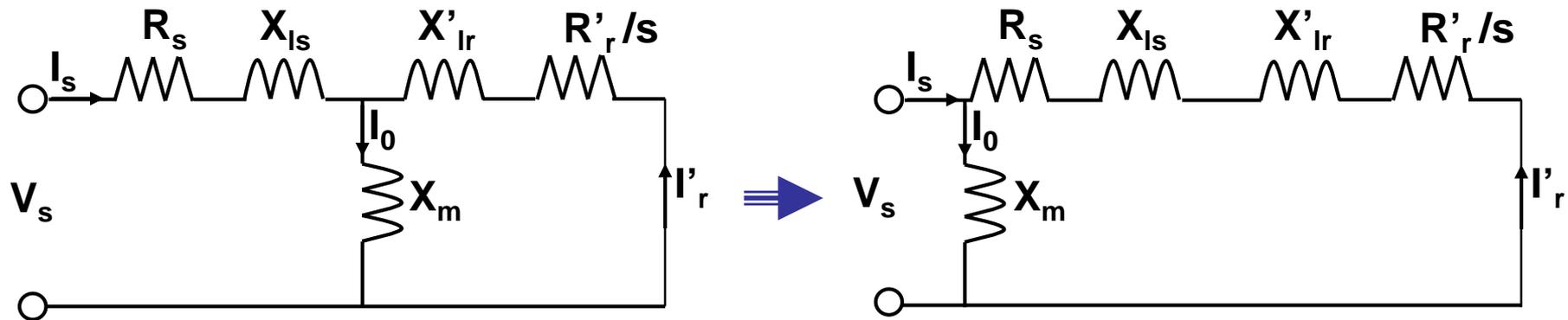
$$C_e = \frac{3(p_p)R_r'}{3} I_r'^2 < 0 ; \omega_m > 0 ; P_m = C_e \cdot \omega_m < 0$$

- La potenza è negativa, ovvero trasmessa dal motore primo alla rete
- La macchina deve essere comunque **collegata in rete o magnetizzata** attraverso altre sorgenti (es. condensatori) per operare da generatore
- **Il funzionamento da generatore è poco comune** per la macchina asincrona.

Espressione della coppia in funzione della tensione di statore

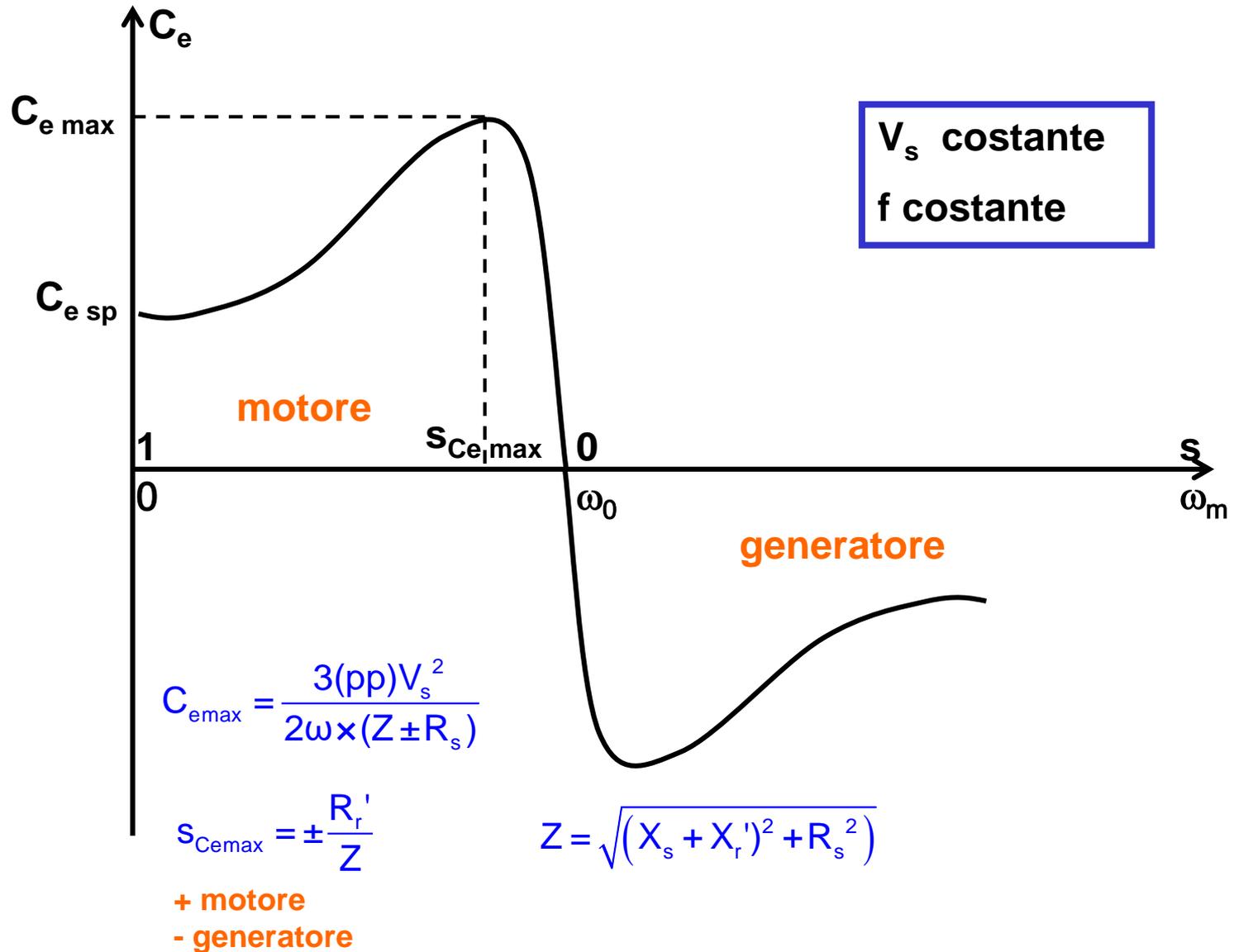
CALCOLO SEMPLIFICATO

- Si trascura R_m
- Si utilizza un circuito equivalente semplificato.



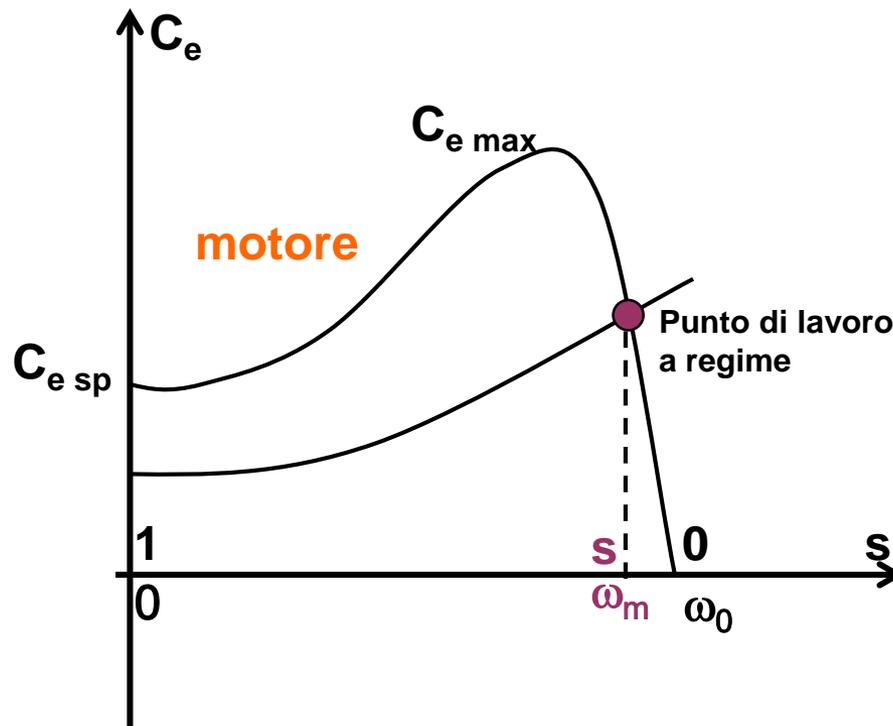
$$C_e = \frac{3(pp)R'_r V_s^2}{s\omega \left[(X_s + X'_r)^2 + \left(R_s + \frac{R'_r}{s} \right)^2 \right]}$$

Caratteristica meccanica della macchina asincrona



Caratteristica meccanica della macchina asincrona

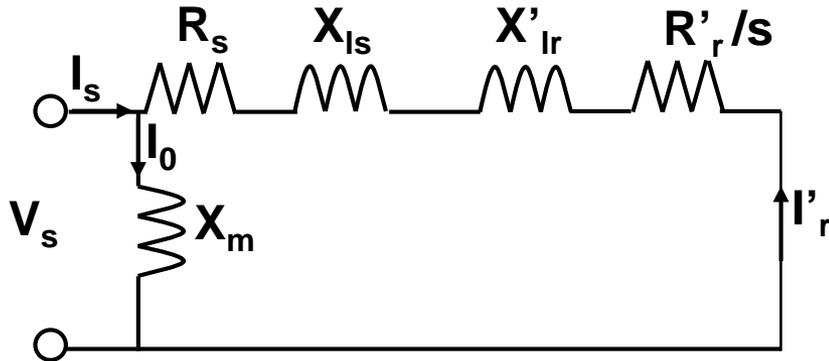
V_s costante
 f costante



- Il punto di lavoro si colloca nella regione della caratteristica lineare a pendenza negativa.
- La velocità è prossima a quella di sincronismo e lo scorrimento prossimo a 0. Valori tipici 0,01-0,05 (1-5%).
- Una pendenza ripida assicura che le variazioni di velocità con il carico siano contenute.
- In questa regione il funzionamento è meccanicamente stabile e il rendimento elevato.
- Punti di lavoro a sinistra del valore di coppia massima sarebbero energeticamente insostenibili (vedi andamento della corrente)
- La coppia di spunto deve essere superiore alla coppia resistente a velocità nulla.

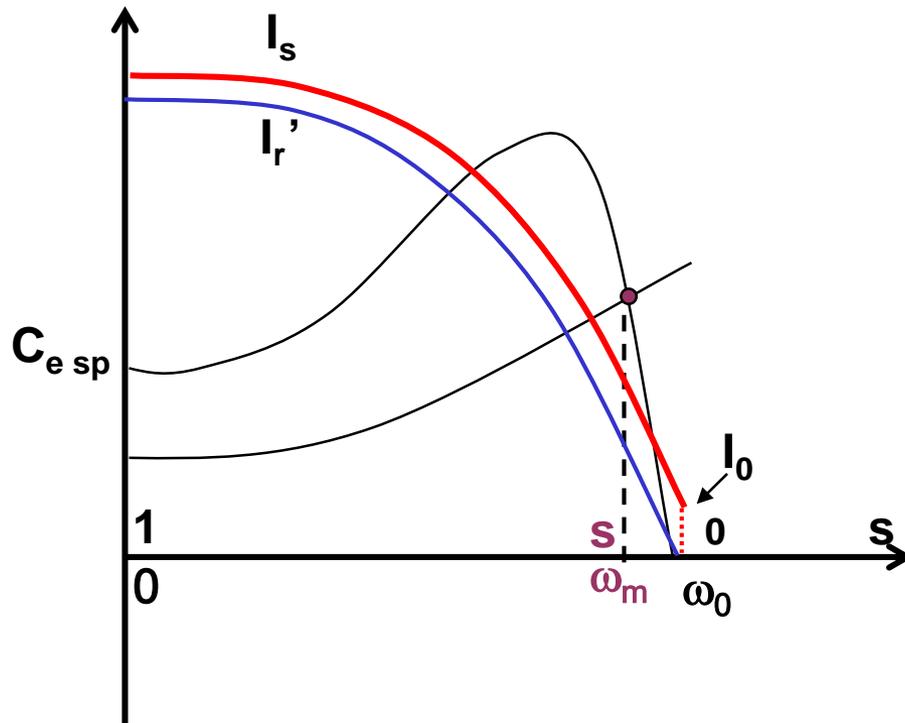
Caratteristica elettromeccanica (corrente / velocità)

Circuito equivalente semplificato.



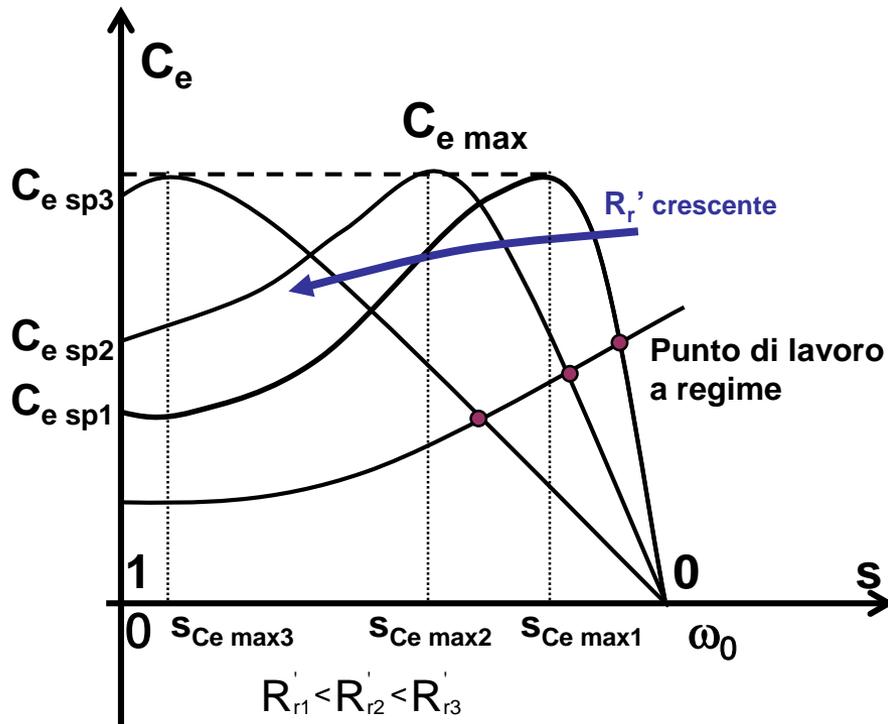
$$\bar{I}_s = \bar{I}_0 + (-\bar{I}'_r)$$

$$|I_0| = \text{cost}; \quad I'_r = \frac{|V_s|}{\sqrt{(X_s + X'_r)^2 + \left(R_s + \frac{R'_r}{s}\right)^2}}$$

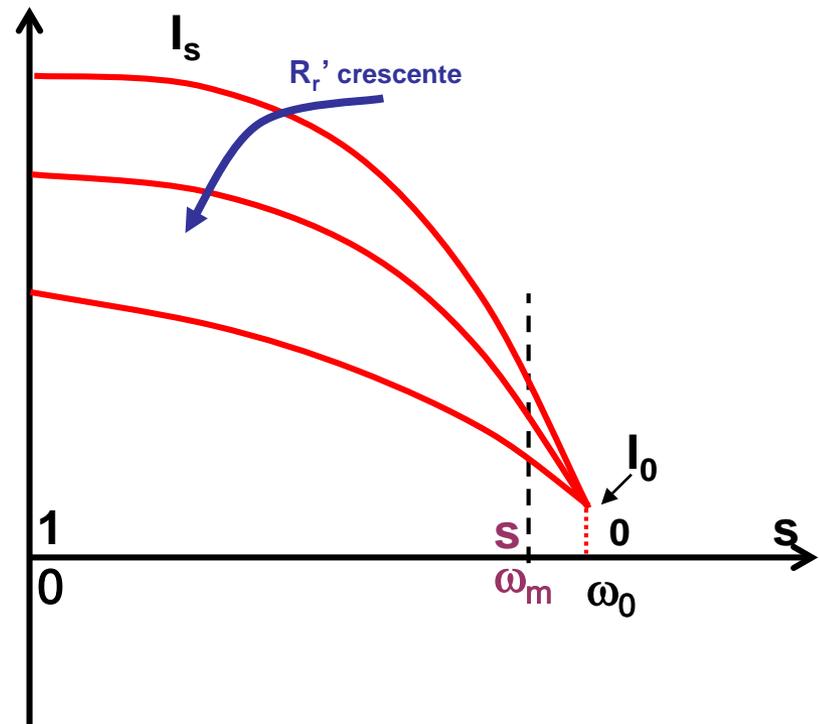


- La corrente magnetizzante è circa costante.
- La corrente rotorica decresce con lo scorrimento.
- Alla velocità di sincronismo la corrente coincide con I_0
- Allo spunto la corrente assume valori 4-7 volte superiore alla corrente in condizioni nominali.
- Punti di lavoro a sinistra del valore di coppia massima sarebbero energeticamente insostenibili (vedi andamento della corrente)
- La coppia di spunto deve essere superiore alla coppia resistente a velocità nulla.
- NB. Il modulo di I_s è dato da una somma vettoriale.

Variazione della resistenza rotorica



- $C_{e\max}$ non dipende da R_r' .
- La coppia di spunto aumenta con R_r' .
- Il punto di lavoro dipende da R_r' : la sua variazione è un metodo di regolazione della velocità



- La corrente di spunto diminuisce con R_r' .

Avviamento della macchina asincrona

Problemi e tecniche di avviamento

- L'avviamento della macchina asincrona alla tensione e frequenza di rete può rappresentare un problema a causa del valore elevato della corrente assorbita (5-10 volte la corrente nominale), soprattutto se la sua durata supera i tempi compatibili con le sue caratteristiche termiche (classe degli isolanti).
- In questo caso può essere previsto un dispositivo di protezione.

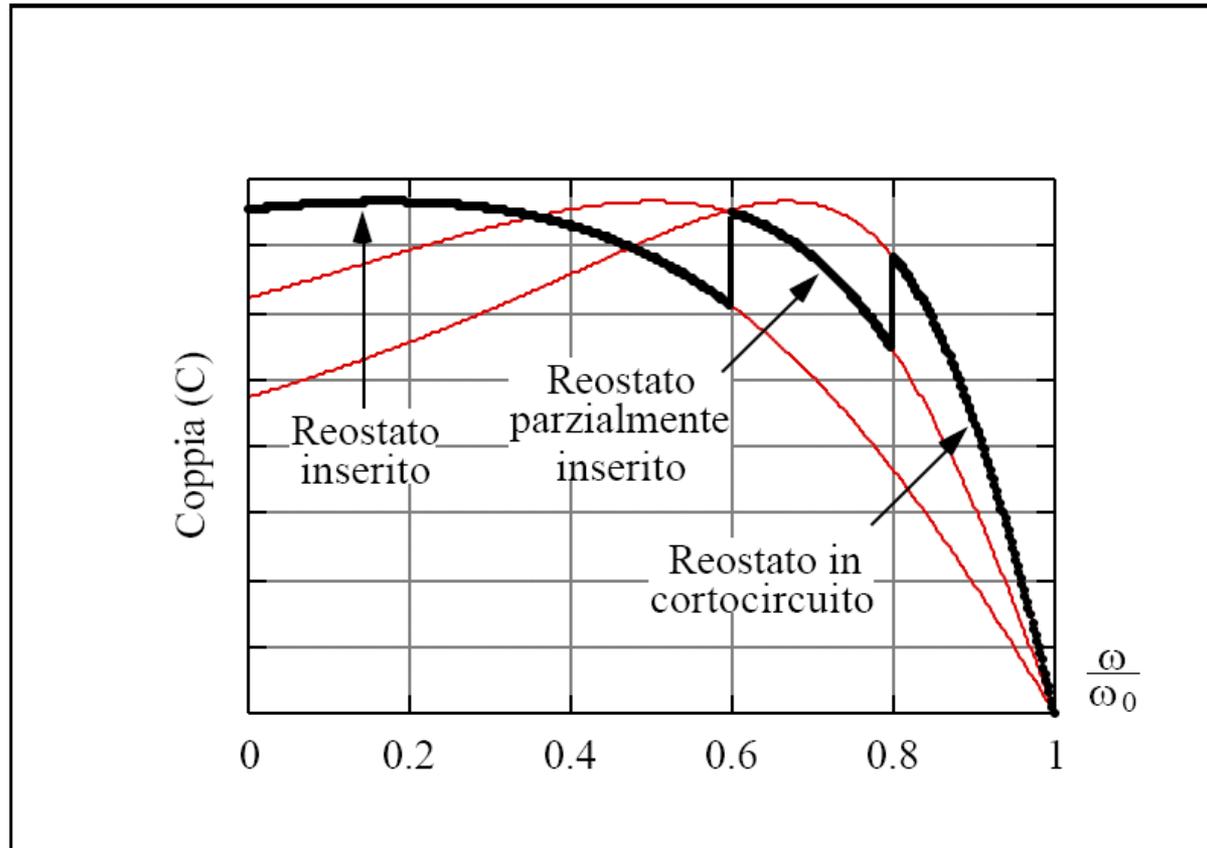
Tecniche per limitare la corrente assorbita all'avviamento da rete

- Inserimento di una resistenza rotorica aggiuntiva durante l'avviamento (macchina a rotore avvolto)
- Riduzione della tensione statorica solo in fase di avviamento
 - Resistori variabili, autotrasformatore, regolazione statica di tensione
 - Commutazione stella-triangolo
- Impiego della doppia gabbia

Avviamento della macchina asincrona

Rotore avvolto

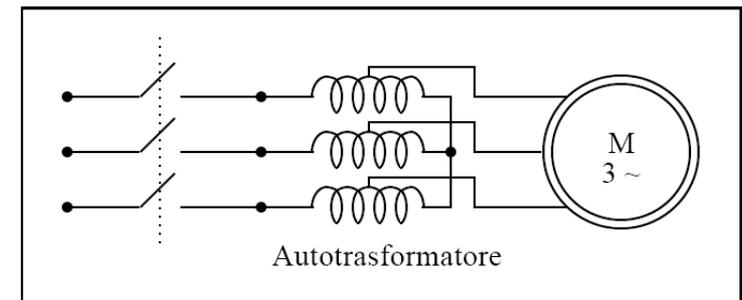
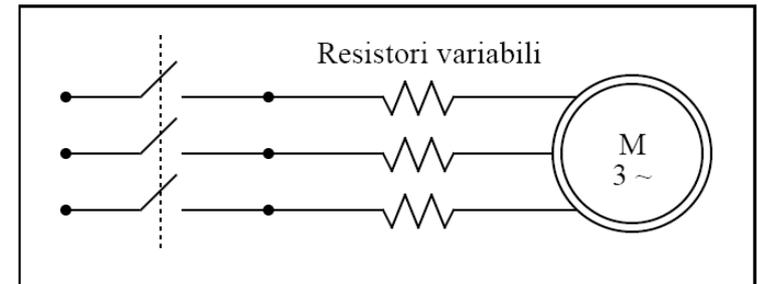
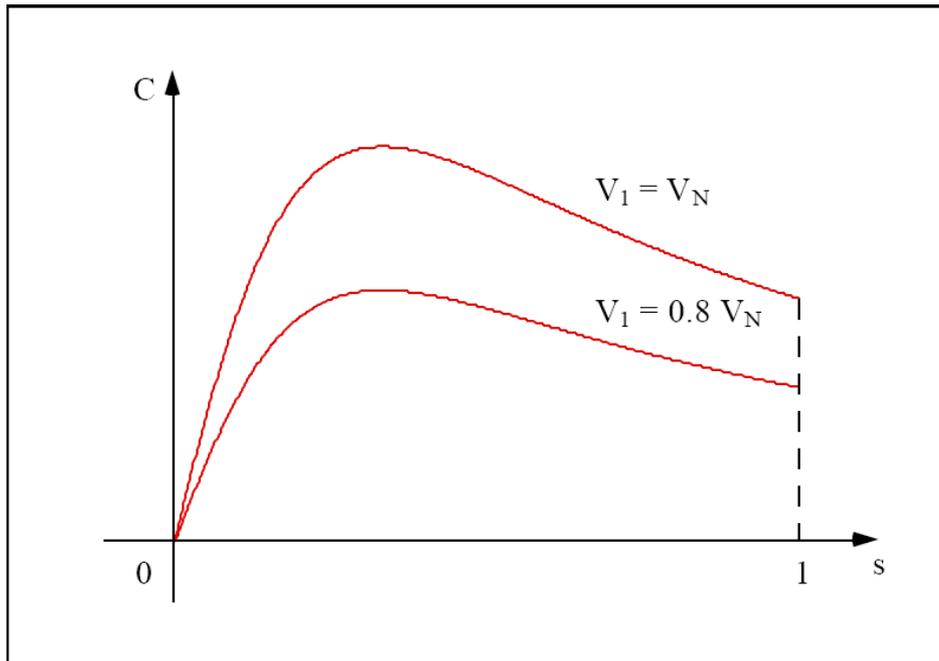
Impiego del reostato di avviamento



Avviamento della macchina asincrona

Rotore a gabbia

Impiego della tensione ridotta

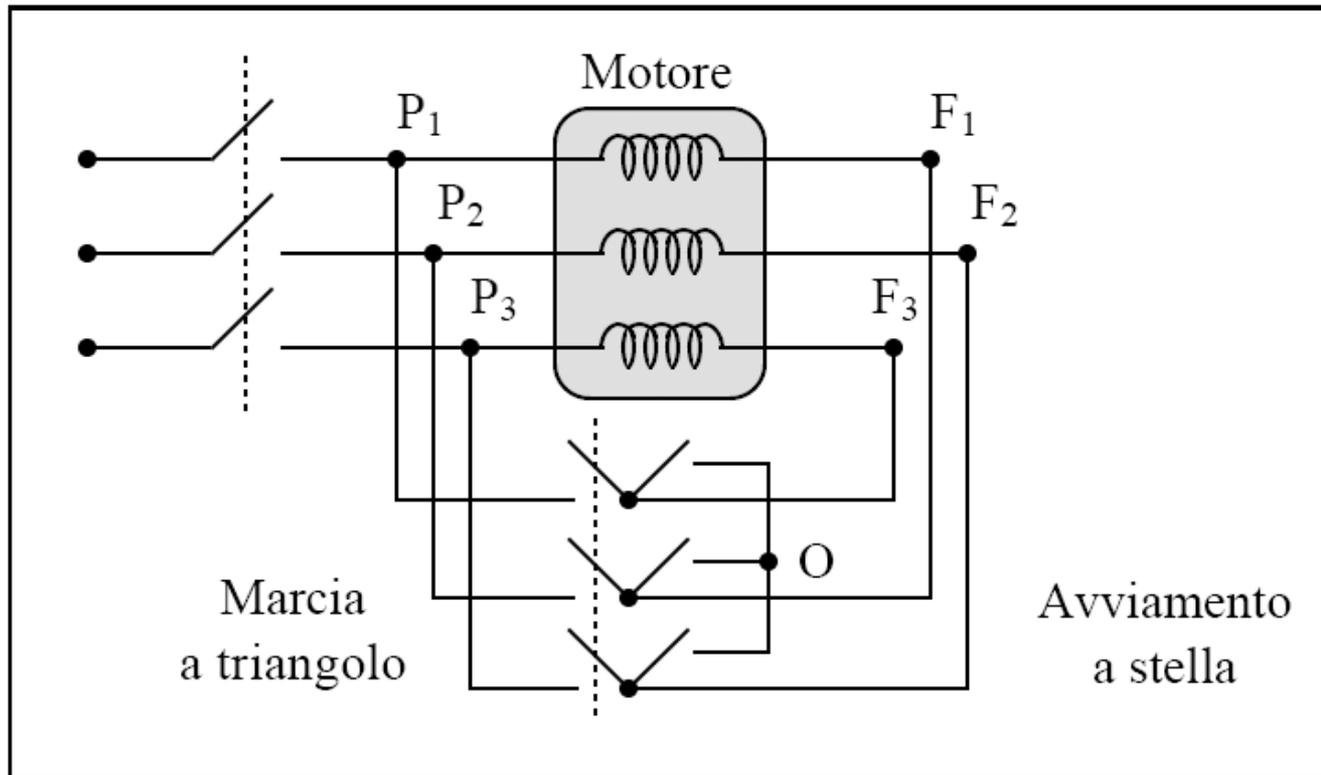


Avviamento della macchina asincrona

Rotore a gabbia

Impiego della tensione ridotta

Commutazione stella-triangolo



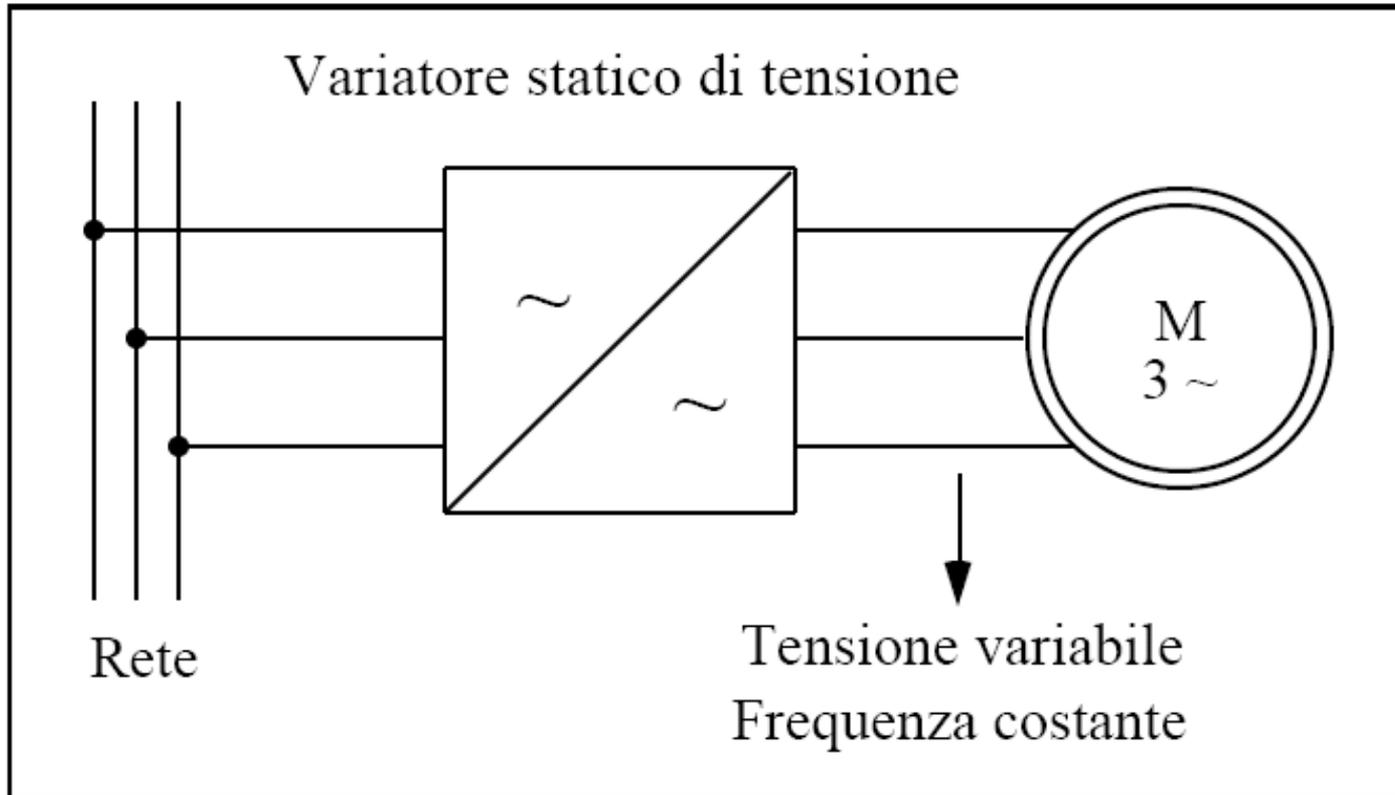
Per i motori la cui tensione nominale, per ciascuno dei suoi avvolgimenti statorici, sia uguale alla tensione concatenata della linea di alimentazione.

Avviamento della macchina asincrona

Rotore a gabbia

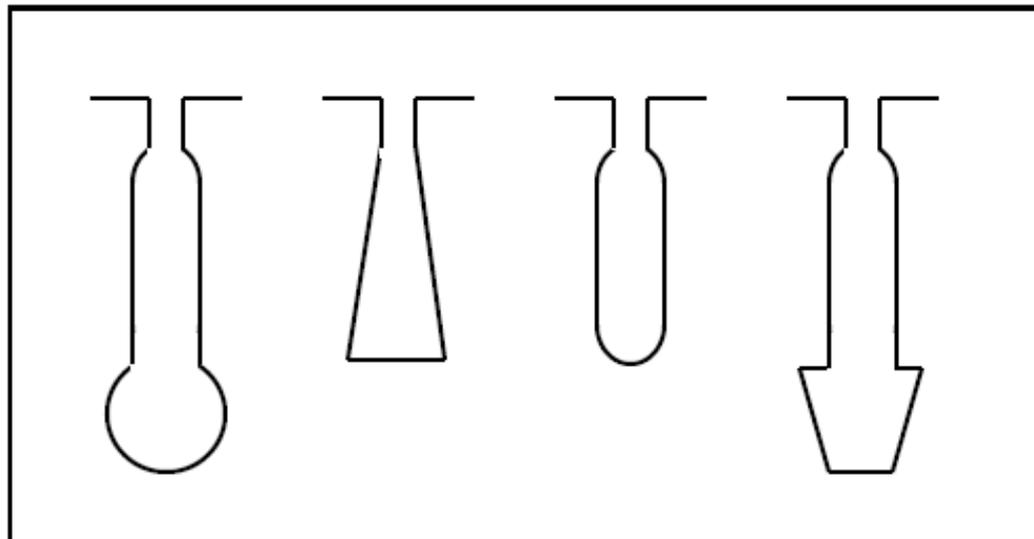
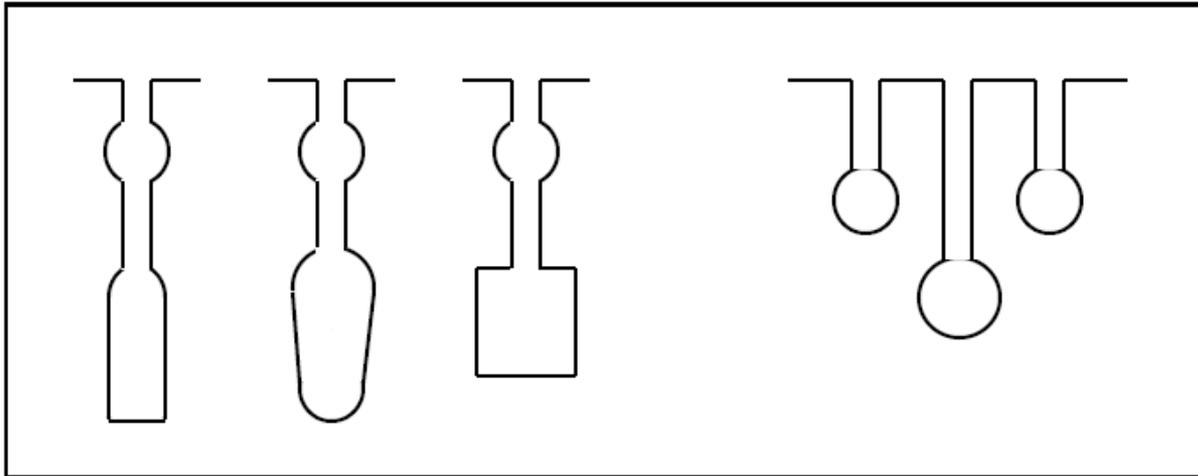
Impiego della tensione ridotta

Variatore statico di tensione



Avviamento della macchina asincrona

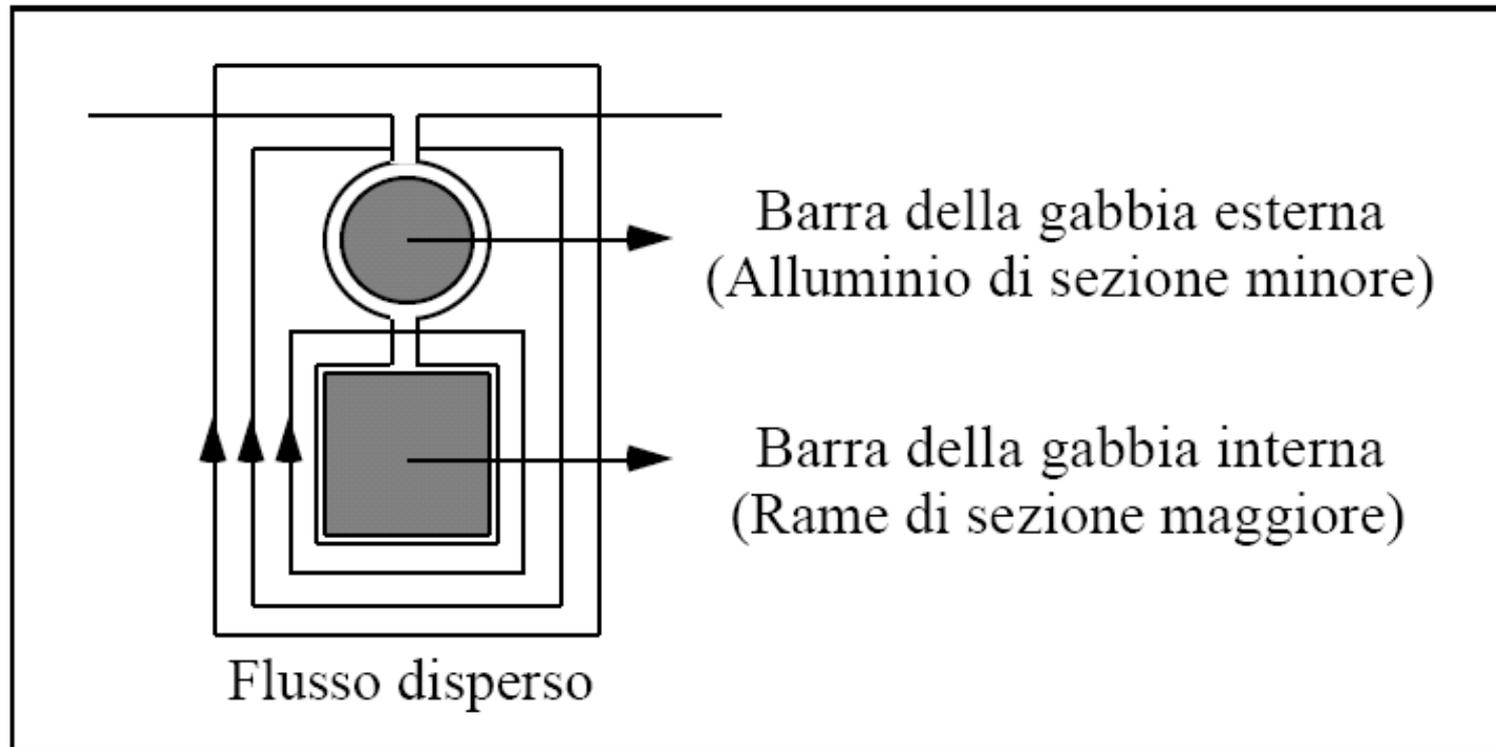
Rotore a doppia gabbia



Avviamento della macchina asincrona

Rotore a doppia gabbia

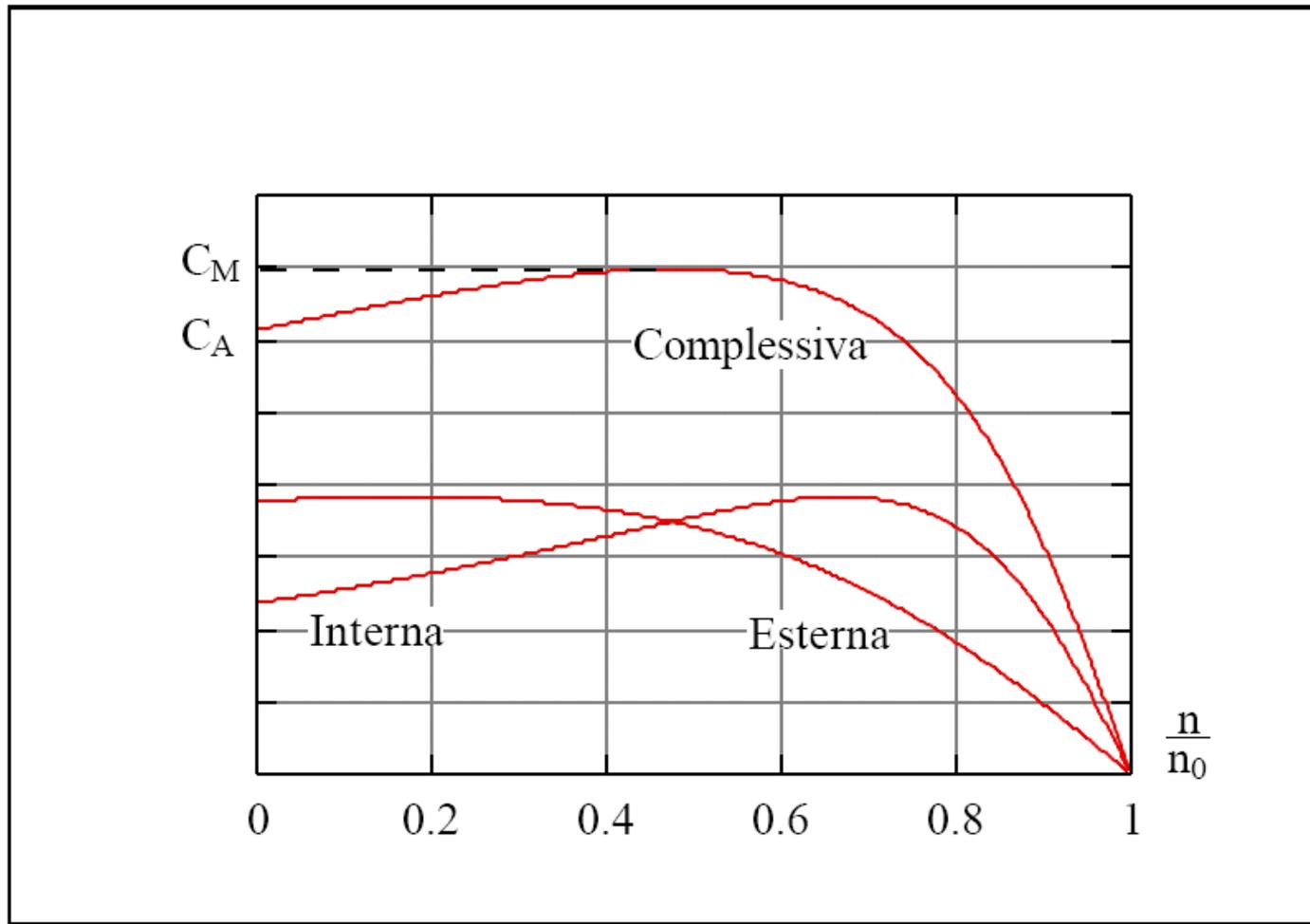
Linee di flusso concatenate



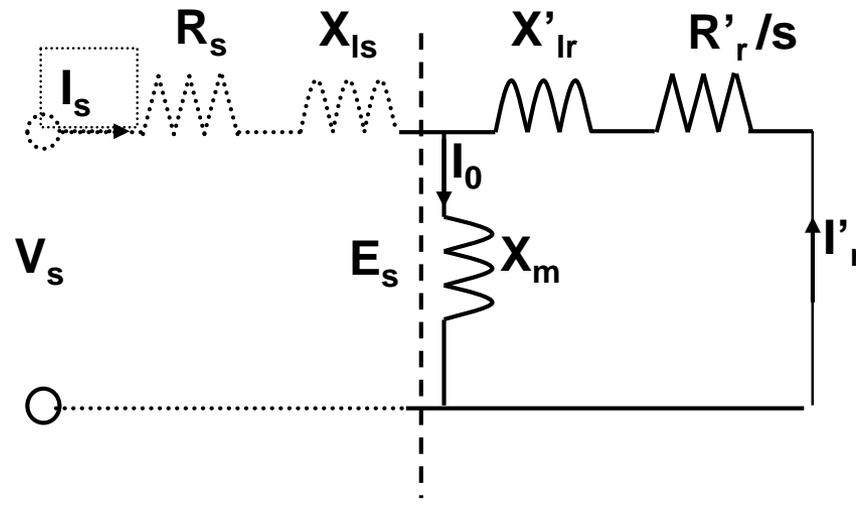
Avviamento della macchina asincrona

Rotore a doppia gabbia

Caratteristica risultante



Coppia nell'ipotesi di flusso costante



Il flusso della macchina è proporzionale a E_s .

L'ipotesi di flusso costante si verifica alternativamente se:

- V_s è costante e si trascurano R_s e X_{ls} (rete, circuito semplificato);
- Tenendo conto di R_s e X_{ls} si regola V_s in modo che E_s si mantenga costante (alimentazione da un inverter e regolazione V/f).

$$C_e = \frac{3(pp)sR'_r E_s^2}{\omega [R_r'^2 + (sX'_r)^2]}$$

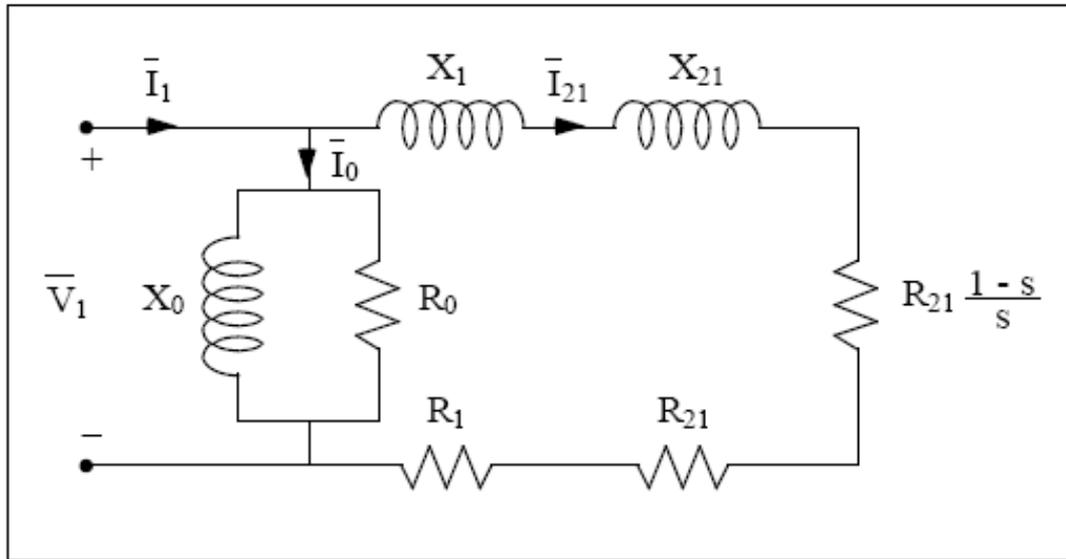
$$C_{emax} = \pm \frac{3(pp)E_s^2}{2\omega X'_r} \quad s_{Cemax} = \pm \frac{R'_r}{X'_r}$$

+ motore
- generatore

Vi è simmetria fra la caratteristica da motore e da generatore.

DIAGRAMMA CIRCOLARE

Circuito equivalente semplificato

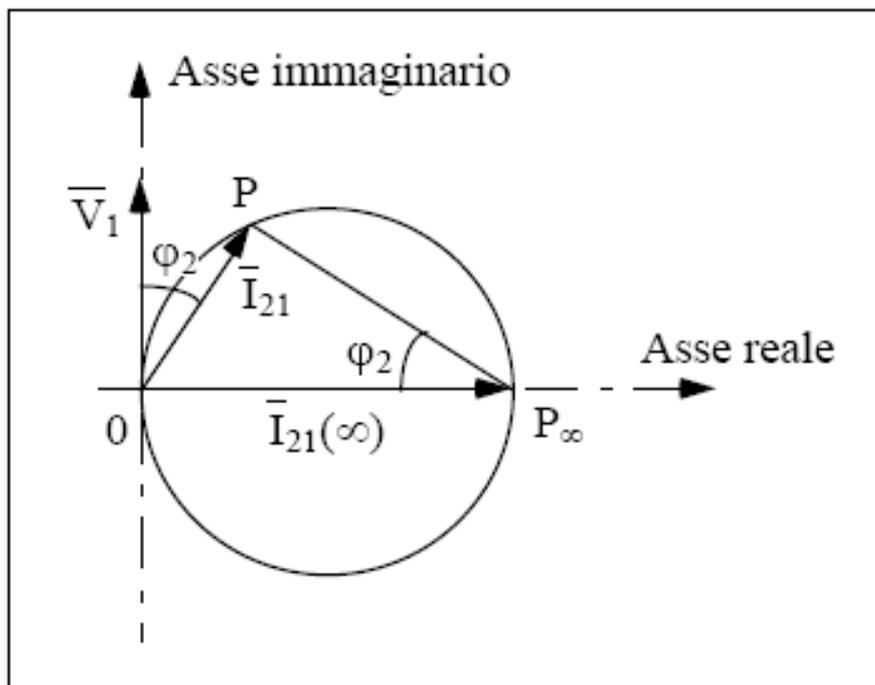


$$\bar{I}_{21} = \frac{\bar{V}_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_{21}}{s}\right)^2 + (X_1 + X_{21})^2}}$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{X_1 + X_{21}}{R_1 + \frac{R_{21}}{s}}$$

DIAGRAMMA CIRCOLARE

Al variare di s da 0 a ∞ il vettore \bar{I}_{21} descrive una semicirconferenza



$$\bar{I}_{21}(\infty) \cong \frac{V_1}{X_1 + X_{21}}, \quad \varphi_2(\infty) \cong \frac{\pi}{2} \text{ (carico puramente induttivo)}$$

DIAGRAMMA CIRCOLARE

La corrente complessivamente assorbita è data $I_1 = I_0 + I_{21}$

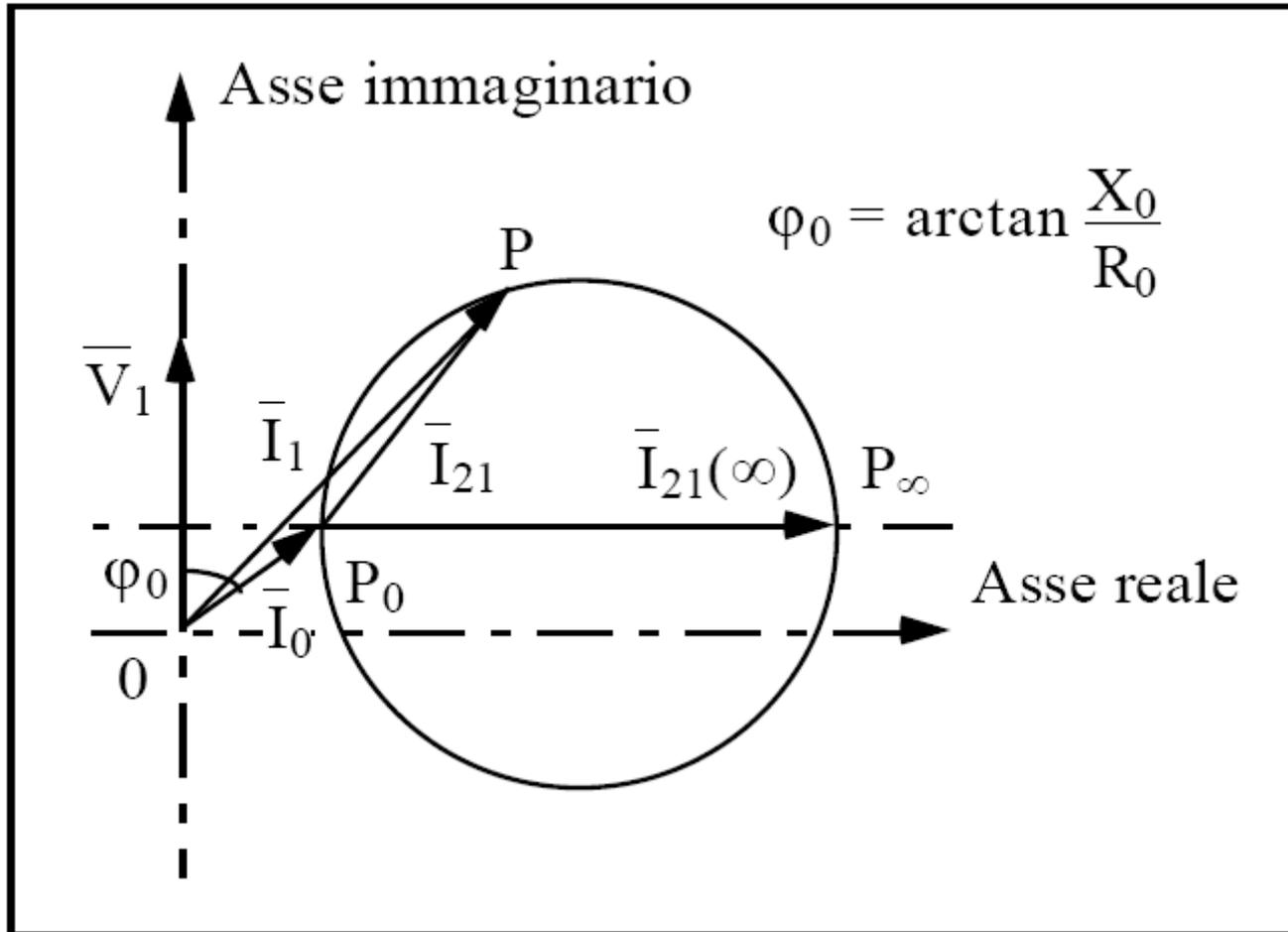


Diagramma per il circuito approssimato

DIAGRAMMA CIRCOLARE

La corrente complessivamente assorbita è data $I_1 = I_0 + I_{21}$

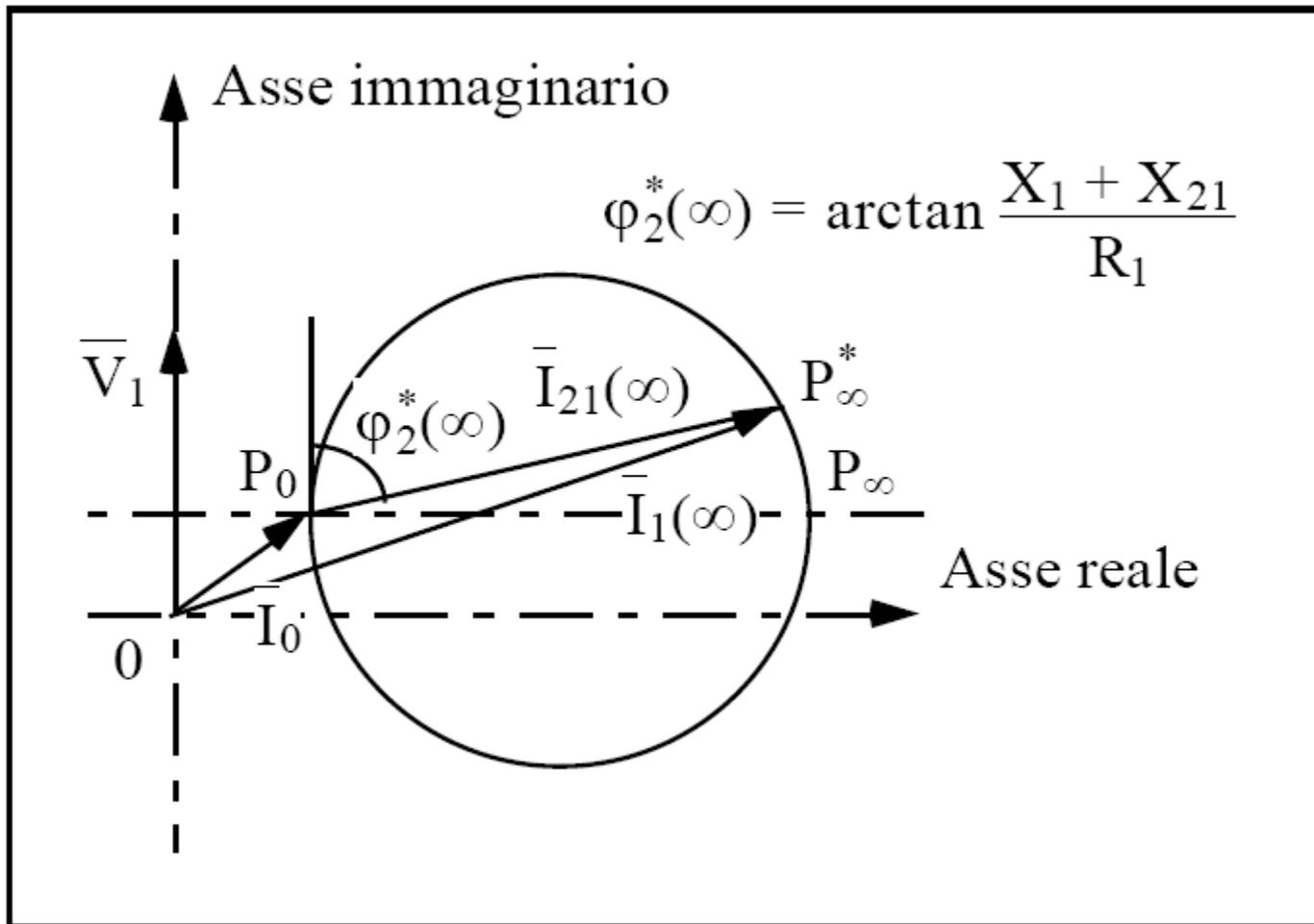
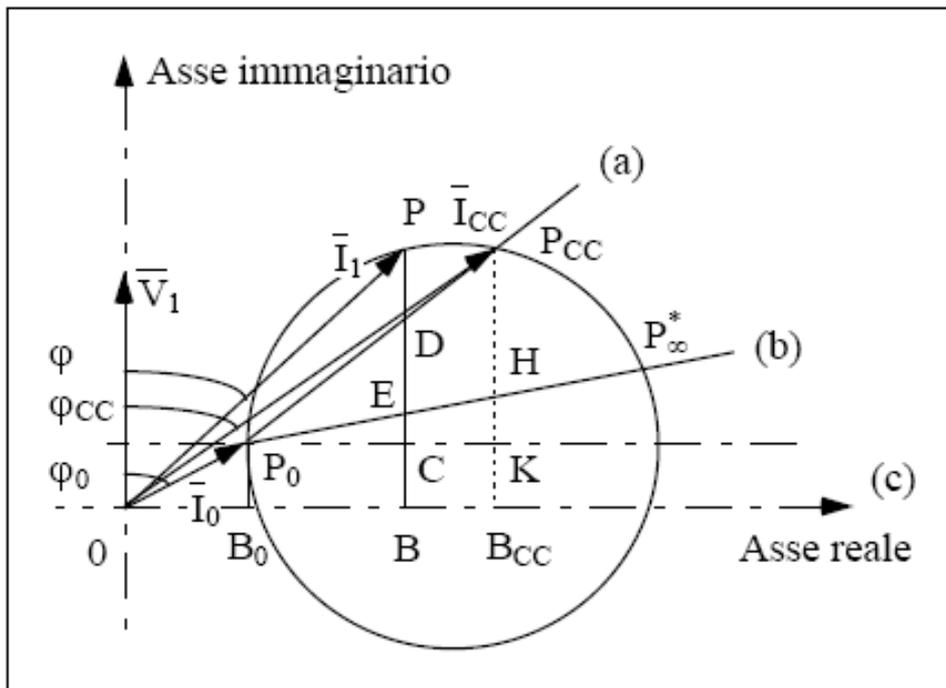


Diagramma considerando le cdt sullo statore

DIAGRAMMA CIRCOLARE

Per un punto P qualsiasi che appartenga al diagramma circolare, risulta:

- il segmento OP rappresenta il modulo della corrente \bar{I}_1 assorbita dal motore;
- il segmento PB, pari a $I_1 \cos \varphi$, è proporzionale, a meno di $3 V_1$, alla potenza assorbita dal motore;
- il segmento OB è proporzionale alla potenza reattiva assorbita dalla macchina.



La retta (b) individua le perdite nello statore ($s=\infty$) La potenza totale assorbita nei vari punti di funzionamento è suddivisa in segmenti proporzionali:

PB potenza totale assorbita di cui:

CB perdite a vuoto

EC perdite nel rame di statore

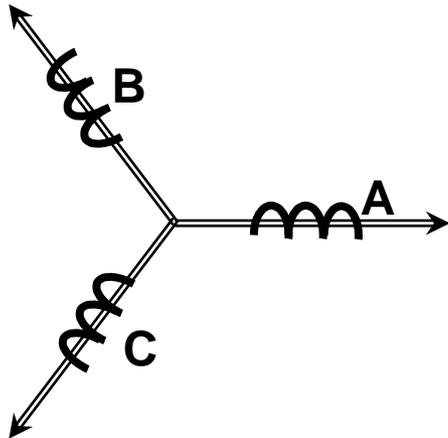
PE potenza totale trasferita al rotore

DE perdite nel rame di rotore

PD potenza meccanica resa

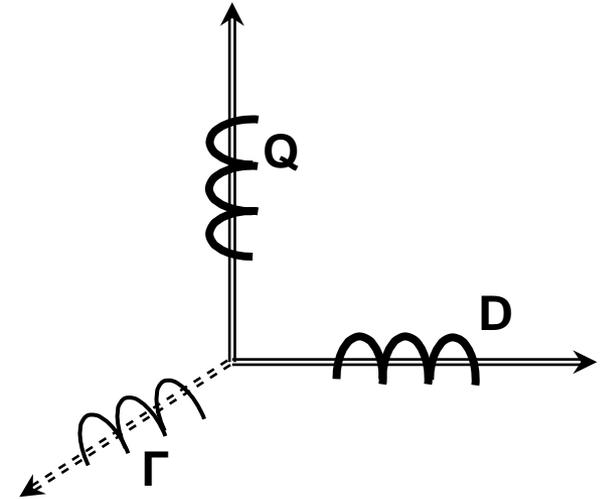
Trasformazioni nella macchina asincrona

Statore



$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

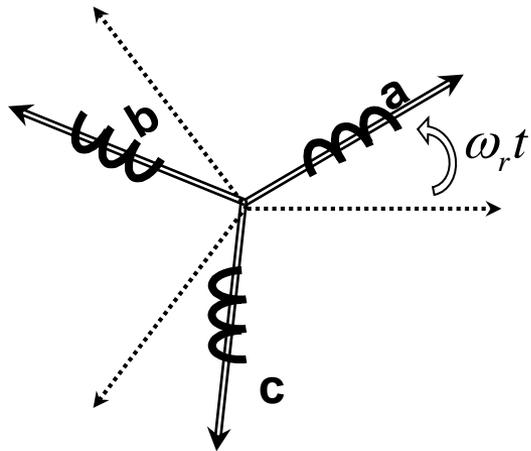
$$\mathbf{C}[\theta_0 = 0]$$



Gli avvolgimenti di statore si trasformano su un sistema di riferimento bifase D,Q fisso rispetto ad A,B,C

Trasformazioni nella macchina asincrona

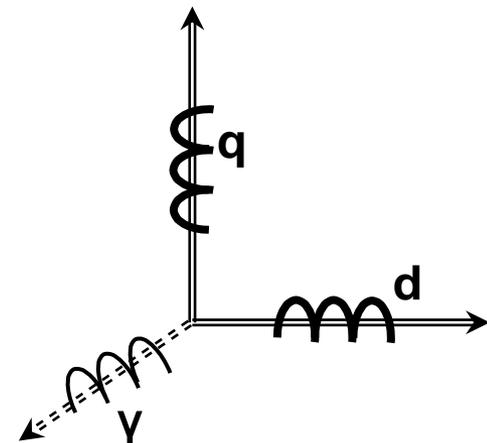
Rotore



$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(-\omega_r t) & \cos(-\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(-\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(-\omega_r t) & -\sin(-\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(-\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

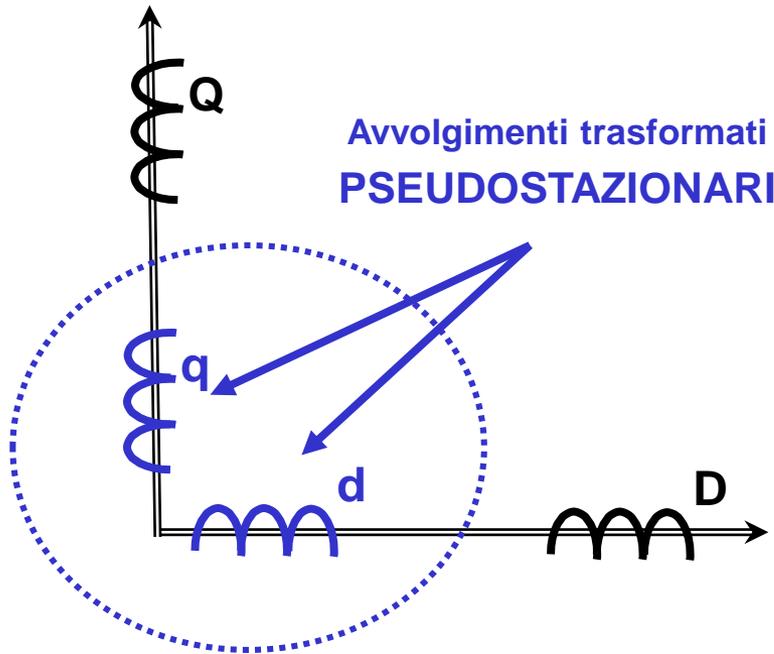
$$\mathbf{C}[\theta_0 = -\omega_r t]$$

- Gli avvolgimenti di rotore si trasformano su un sistema di riferimento bifase d,q rotante rispetto ad a,b,c ad una velocità pari a $-\omega_r t$, in modo che D,Q e d,q si trovano entrambi su un sistema fisso



Equazioni della macchina asincrona nel sistema trasformato

$$\begin{bmatrix} V_D \\ V_Q \\ V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 & L_{Dd} & 0 \\ 0 & L_Q & 0 & L_{Qq} \\ L_{dD} & 0 & L_d & 0 \\ 0 & L_{qQ} & 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} +$$



$$-\omega_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_{qQ} & 0 & -L_q \\ L_{dD} & 0 & L_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = C_e - C_r$$

$$C_e = (pp) [i]^T [G] [i] = (pp) (\Psi_D i_q - \Psi_Q i_d)$$

Equazioni della macchina asincrona nel sistema trasformato: sintesi

$$\begin{bmatrix} v_D \\ v_Q \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 p & 0 & Mp & 0 \\ 0 & R_1 + L_1 p & 0 & Mp \\ Mp & \omega_r M & R_2 + L_2 p & \omega_r L_2 \\ -\omega_r M & Mp & -\omega_r L_2 & R_2 + L_2 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$Jp\omega_m = C_e - C_r$$

$$C_e = (pp)M(I_D i_q - I_Q i_d)$$

$L_1 = L_D = L_Q$ Autoinduttanze di statore

$L_2 = L_d = L_q$ Autoinduttanze di rotore

$M = M_{Dd} = M_{dD} = M_{Qq} = M_{qQ}$ Mutue induttanze fra avvolgimenti di statore e di rotore

Equazioni della macchina asincrona nel sistema trasformato: sintesi

$$\begin{cases} v_D = R_1 i_D + L_1 \frac{di_D}{dt} + M \frac{di_d}{dt} \\ v_Q = R_1 i_Q + L_1 \frac{di_Q}{dt} + M \frac{di_q}{dt} \end{cases}$$

$$v_D + jv_Q = R_1 (i_D + ji_Q) + L_1 \frac{d(i_D + ji_Q)}{dt} + M \frac{d(i_d + ji_q)}{dt}$$

$$\bar{v}_s = R_1 \bar{i}_s + L_1 \frac{d\bar{i}_s}{dt} + M \frac{d\bar{i}_r}{dt}$$

$$\begin{cases} v_d = R_2 i_d + L_2 \frac{di_d}{dt} + M \frac{di_D}{dt} + \omega_r (L_2 i_q + M i_Q) \\ v_Q = R_2 i_q + L_2 \frac{di_q}{dt} + M \frac{di_Q}{dt} - \omega_r (L_2 i_d + M i_D) \end{cases}$$

$$v_d + jv_q = R_2 (i_d + ji_q) + L_2 \frac{d(i_d + ji_q)}{dt} + M \frac{d(i_D + ji_Q)}{dt} + \omega_r [L_2 (i_q - ji_d) + M (i_Q - ji_D)]$$

$$\bar{v}_r = R_2 \bar{i}_r + L_2 \frac{d\bar{i}_r}{dt} + M \frac{d\bar{i}_s}{dt} - j\omega_r (L_2 \bar{i}_r + M \bar{i}_s)$$

Coppia istantanea

$$C_e = (pp)M(I_D i_q - I_Q i_d)$$

$$I_D = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} I_A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_d = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} I_a \cos(\omega t - k)$$

$$I_Q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} I_A \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$I_q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} I_a \cos(\omega t - k - \frac{\pi}{2})$$

$$C_e = 3(pp)I_A I_a M \left[\cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - k - \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t - k) \right] =$$

$$= 3(pp)I_A I_a M \operatorname{sen}[(\omega t + k) - (\omega t - \varphi)] =$$

$$= 3(pp)I_A I_a M \operatorname{sen}[k - \varphi] \quad \text{costante}$$

Induttanze della macchina reale

$$L_A = L_B = L_C = L_s \quad \text{costanti (macchina isotropa)}$$

$$L_a = L_b = L_c = L_r \quad \text{costanti (macchina isotropa)}$$

$$M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M_s \quad \text{costanti (macchina isotropa)}$$

$$M_{ab} = M_{bc} = M_{ca} = M_r \quad \text{costanti (macchina isotropa)}$$

$$M_{aA} = M_{Aa} = M_{rs} \cos \vartheta_r$$

$$M_{bA} = M_{Ab} = M_{rs} \cos \left(\vartheta_r - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{cA} = M_{Ac} = M_{rs} \cos \left(\vartheta_r + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{aB} = \dots \quad \text{ecc.}$$

Induttanze della macchina reale: trasformazioni

$$[L_{DQ\Gamma}] = [C_0][L_{ABC}][C_0]^T$$

$$[L_{dq\gamma}] = [C][L_{abc}][C]^T$$

$$[L_{DQdq}] = [L_{dqDQ}] = [C_0][L_{ABCabc}][C]^T$$



$$L_D = L_Q = L_1 = L_s - M_s$$

$$L_d = L_q = L_2 = L_r - M_r$$

$$L_{Dd} = L_{Qq} = M = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{rs}$$

Equazioni di funzionamento in regime sinusoidale

In regime PAS nel sistema di riferimento d-q tutte le grandezze elettriche hanno pulsazione ω

Inoltre a regime l'operatore $p \rightarrow j\omega$.

La tensione sugli avvolgimenti di rotore è nulla.

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_D \\ \bar{V}_Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M & 0 \\ 0 & R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ j\omega M & (1-s)\omega M & R_2 + j\omega L_2 & (1-s)\omega L_2 \\ -(1-s)\omega M & j\omega M & -(1-s)\omega L_2 & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_D \\ \bar{I}_Q \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_q \end{bmatrix}$$

$$\text{In cui } \omega_r = (1-s) \cdot \omega$$

Alle grandezze elettriche istantanee si sono sostituiti i rispettivi fasori (nel riferimento D, Q)

\bar{V}_D, \bar{V}_Q Tensioni di statore

$\bar{I}_D, \bar{I}_Q, \bar{I}_d, \bar{I}_q$ Correnti di statore e rotore

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

Nel sistema reale l'alimentazione dello statore è costituita da una terna equilibrata di tensioni:

$$v_A(t) = \sqrt{2} V \cos \omega t$$

$$v_B(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$v_C(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \quad \text{in cui } V \text{ è il valore efficace}$$

Trasformando nel sistema D,Q
$$\begin{bmatrix} v_{DQ\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ABC} \end{bmatrix}$$

$$v_D(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} V \cos \omega t;$$

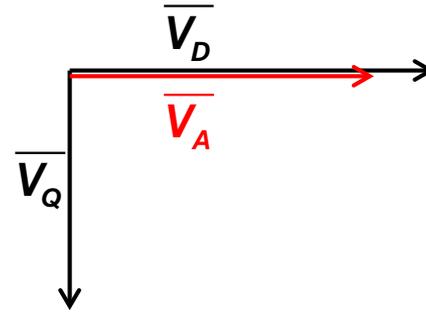
$$v_Q(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} V \sin \omega t$$

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

La corrispondente relazione tra i fasori è rappresentata da:

$$\overline{V}_D = \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{V}_A$$

$$\overline{V}_Q = -j \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{V}_A$$



Analogamente:

$$\overline{I}_D = \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{I}_A$$

$$\overline{I}_Q = -j \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{I}_A$$

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{V_A} \\ -j\sqrt{\frac{3}{2}} \overline{V_A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M & 0 \\ 0 & R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ j\omega M & (1-s)\omega M & R_2 + j\omega L_2 & (1-s)\omega L_2 \\ -(1-s)\omega M & j\omega M & -(1-s)\omega L_2 & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{I_A} \\ -j\sqrt{\frac{3}{2}} \overline{I_A} \\ \overline{I_d} \\ \overline{I_q} \end{bmatrix}$$

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

Per esteso:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{V}_A = (R_1 + j\omega L_1)\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{I}_A + j\omega M\bar{I}_d$$

$$-j\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{V}_A = (R_1 + j\omega L_1)\left(-j\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{I}_A\right) + j\omega M\bar{I}_q \quad (\text{moltiplicando per } j) \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{V}_A = (R_1 + j\omega L_1)\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{I}_A - \omega M\bar{I}_q$$

Ricordando la relazione: $\bar{I}_q = -j\bar{I}_d$

Le equazioni di statore lungo gli assi d e q sono quindi rappresentate a regime da una medesima equazione (la macchina infatti è isotropa)

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

Anche le correnti di rotore sono rappresentate da un sistema equilibrato

$$\begin{cases} i_b(t) = I_M \cos\left(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c(t) = I_M \sin\left(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow C_T(-\omega_r) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_b(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\left(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\omega_r t - \frac{\pi}{3}\right] \\ i_c(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\omega_r t - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\omega_r t - \frac{4\pi}{3}\right] \\ i_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\omega_r t - \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} I_M \cos\left[\omega_r t - \frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Tensioni reali e trasformate in regime sinusoidale

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{V}_A \\ -j\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{V}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M & 0 \\ 0 & R_1 + j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ j\omega M & (1-s)\omega M & R_2 + j\omega L_2 & (1-s)\omega L_2 \\ -(1-s)\omega M & j\omega M & -(1-s)\omega L_2 & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{I}_A \\ -j\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{I}_A \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_q \end{bmatrix}$$

Il sistema si riconduce quindi a una sola equazione di statore e una di rotore:

$$\bar{V}_A = (R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_A + j\omega M \bar{I}_a$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_{21}) \bar{I}_a + j\omega s M \bar{I}_A$$