MACCHINE ELETTRICHE

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Anno Accademico 2015-2016

TRASFORMAZIONI PER MACCHINE ELETTRICHE

Docente Francesco Benzi
Università di Pavia
e-mail: fbenzi@unipv.it

Dispense in collaborazione con
Giovanni Petrecca e Lucia Frosini

CONCETTO DI TRASFORMAZIONE

In questo corso relativo alle macchine e azionamenti elettrici si intende per **Trasformazione** un'operazione di conversione geometrica dei fasori che rappresentano grandezze elettromagnetiche da un sistema di riferimento ad uno diverso,

con la condizione che in questo passaggio non vengano modificati il significato fisico ed il valore di alcune grandezze ritenute fondamentali:

- La distribuzione nello spazio della forza magnetomotrice (e quindi dei campi magnetici prodotti)
- L'energia e la potenza associate alla conversione descritta

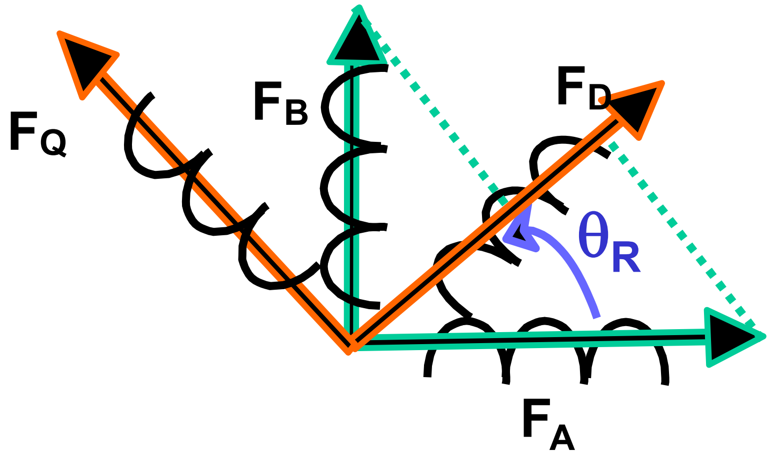
CONCETTO DI TRASFORMAZIONE

Tensioni, correnti e flussi possono avere espressioni e valori diversi nei diversi sistemi di riferimento, ma producono la stessa distribuzione di fmm e la stessa energia, potenza e grandezze collegate come la coppia.

Un modello di macchina in un sistema di riferimento trasformato può essere più semplice di quello della macchina nel riferimento naturale se ad esempio:

- Nel nuovo riferimento i parametri (induttanze) non dipendono da θ_r
- Gli assi di riferimento sono in quadratura (mutue induttanze spesso nulle)

TRASFORMAZIONE DA SISTEMA FISSO A ROTANTE



Nell'esempio la coppia di avvolgimenti D-Q deve produrre la medesima distribuzione di fmm generata dalle due fasi A, B

Ad es. La somma delle componenti delle 2 fmm **F_A, F_B** in direzione dell'asse D, deve coincidere con la fmm prodotta da D, **F_D**

$$\begin{cases} F_D = F_A\cos\theta_0 + F_B\sin\theta_0 \\ F_Q = -F_A\sin\theta_0 + F_B\cos\theta_0 \end{cases}$$

θ_0 è l'angolo fra i due riferimenti (fra l'asse A e l'asse D), che può essere costante o variabile (sistemi in moto fra loro)

LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE C_0

$$\begin{bmatrix} F_D \\ F_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_0) & sin(\theta_0) \\ -sen(\theta_0) & cos(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix}$$

$$F_{DQ} = C_0 \; F_{AB}$$

La relazione qui definita vale per i campi, e in particolare nel caso in cui F rappresenti la forza magnetomotrice F=Ni.
Da qui si può ricavare la relazione fra correnti.

MATRICE DI TRASFORMAZIONE C_0

$$[C_0] = \begin{bmatrix} cos(\theta_0) & sen(\theta_0) \\ -sen(\theta_0) & cos(\theta_0) \end{bmatrix}$$

Questa trasformazione garantisce che si conservino le distribuzioni di forze magnetomotrici (e di campi magnetici) e le potenze elettriche.

Inoltre la matrice C_0 è ortogonale e pertanto si può definire la trasformazione inversa:

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_0) & -sin(\theta_0) \\ sen(\theta_0) & cos(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_D \\ F_Q \end{bmatrix}$$

$$F_{AB} = C_0^{-1} \; F_{DQ} = C_0^{T} \; F_{DQ}$$

Esempio: trasformazione di correnti

Si vuole trasformare un sistema bifase di correnti di pulsazione ω dal sistema fisso in un sistema di riferimento in quadratura rotante rispetto al primo alla velocità angolare ω_0.

$$i_A = I\cos\omega t \;;\quad i_B = I\sin\omega t$$

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & sen(\omega_0 t) \\ -sen(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix}$$

Sostituendo e risolvendo:

$$i_D = I\cos(\omega - \omega_0)t \;;\quad i_Q = I\,sen(\omega - \omega_0)t$$

Nel caso in cui $\omega_0 = \omega$:

$$i_D = I \;;\quad i_Q = 0$$

Nel nuovo riferimento le grandezze da alternate sono diventate costanti.

Trasformazione delle impedenze

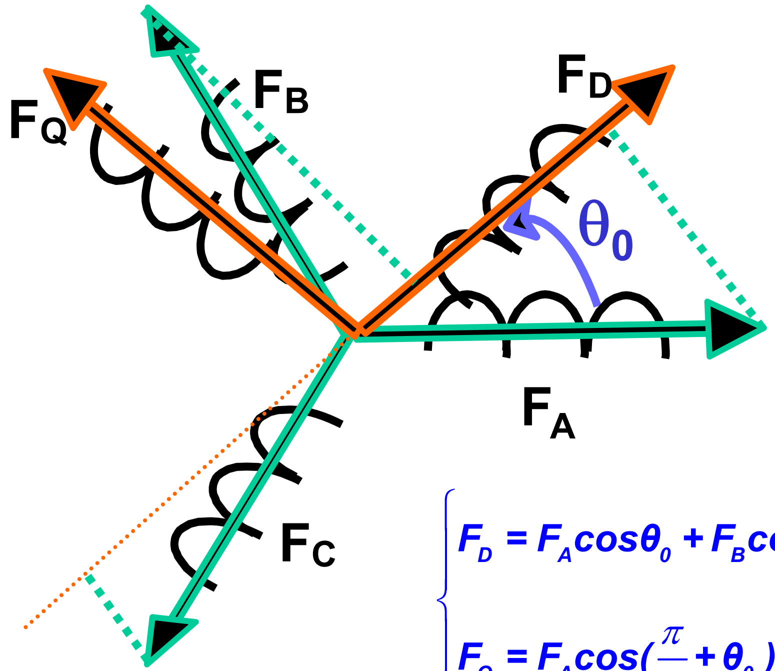
Dalla definizione delle relazioni fra correnti e tensioni discende la formula di trasformazione per le impedenze.

$$\left[v_{AB}\right] = Z_{AB} \times \left[i_{AB}\right]$$

$$v_{DQ} = C_0 v_{AB} = C_0 Z_{AB} C_0^T i_{DQ}$$

$$\boxed{Z_{DQ} = C_0 Z_{AB} C_0^T}$$

TRASFORMAZIONE DA UN SISTEMA TRIFASE A BIFASE



Nell'esempio la coppia di avvolgimenti D-Q deve produrre la medesima distribuzione di fmm generata dalle tre fasi A, B, C

Ad es. La somma delle componenti delle 3 fmm $\mathbf{F_A}$, $\mathbf{F_B}$, $\mathbf{F_C}$ in direzione dell'asse D, deve coincidere con la fmm prodotta da D, cioè $\mathbf{F_D}$

$$\begin{cases} F_D = F_A\cos\theta_0 + F_B\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_0\right) + F_C\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta_0\right) \\ F_Q = F_A\cos(\frac{\pi}{2} + \theta_0) + F_B\cos\left(\frac{2\pi}{3} - (\frac{\pi}{2} + \theta_0)\right) + F_C\cos\left(\frac{4\pi}{3} - (\frac{\pi}{2} + \theta_0)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_D = F_A\cos\theta_0 + F_B\cos\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + F_C\cos\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ F_Q = -F_A\sin\theta_0 - F_B\sin\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) - F_C\sin\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

θ_0 è l'angolo fra i due riferimenti (fra l'asse A e l'asse D), che può essere costante o variabile (sistemi in moto fra loro)

LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE

$$\begin{bmatrix} F_D \\ F_Q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta_0 & -\sin\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}}_{C'\,[2\times 3]} \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{bmatrix}$$

C’ non è quadrata, quindi non è invertibile; non possiamo scrivere:

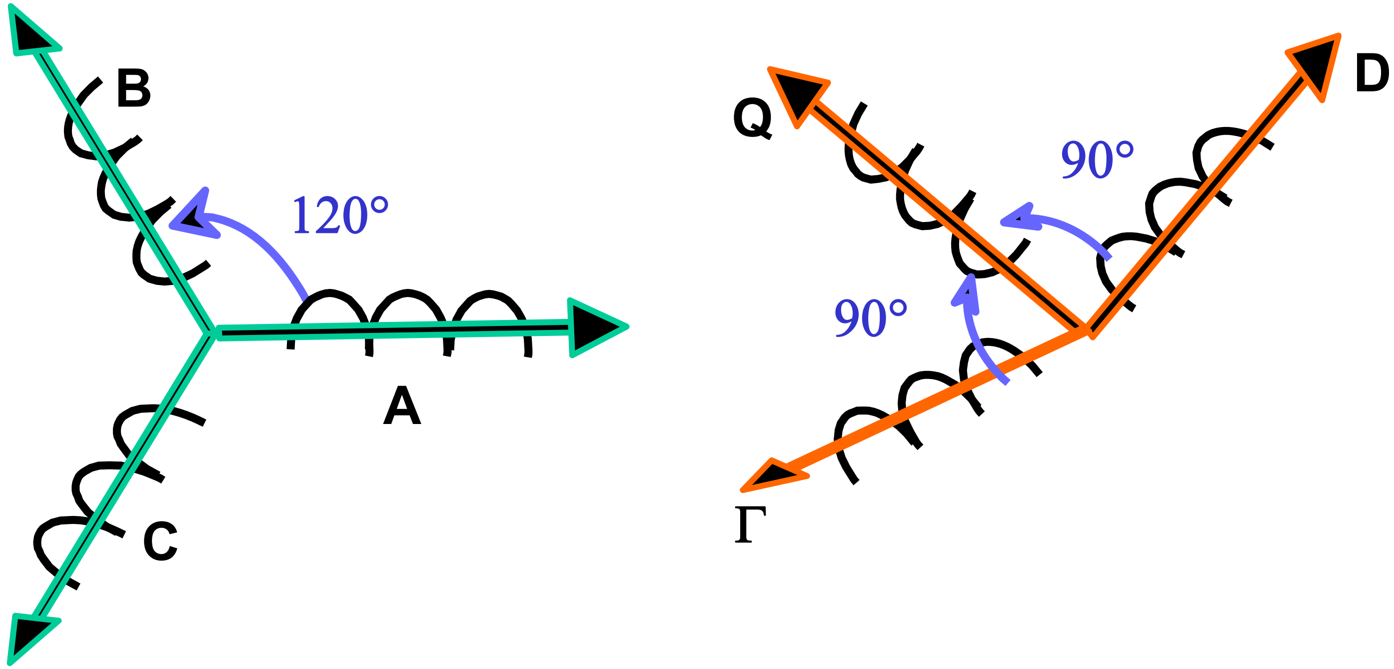
$$\cancel{\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{bmatrix} = [C']^{-1} \begin{bmatrix} F_D \\ F_Q \end{bmatrix}}$$

In realtà in un sistema a tre fili F_A, F_B, F_C non sono indipendenti:

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad \Rightarrow \quad i_A = -i_B - i_C$$

pertanto è possibile stabilire una corrispondenza fra il sistema trifase di partenza e un sistema trasformato, nel quale però per consentire una trasformazione Introduciamo un terzo avvolgimento nel sistema D, Q

ASSI ORTOGONALI



L'asse Γ è normale a D e Q (normale al piano del foglio). In questo modo, con assi ortogonali, le mutue induttanze risultano minimizzate nel nuovo sistema di riferimento.

Si può definire la seguente relazione certamente verificata per F_Γ :

$$F_\Gamma = k \times (F_A + F_B + F_C) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\forall k,\ F_\Gamma = 0$$

LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE (2)

$$\begin{bmatrix} F_D \\ F_Q \\ F_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \cos\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -sen(\theta_0) & -sen\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -sen\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ k & k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{bmatrix}$$

$$F_{DQ\Gamma} = \quad H \; F_{ABC}$$

La relazione qui definita vale per i campi, e in particolare nel caso in cui F rappresenti la forza magnetomotrice M=Ni.
Da qui si può ricavare la relazione fra correnti.

TRASFORMAZIONI PER CORRENTI

Si indica con $\mathbf{N_1}$ il numero di spire del sistema trifase di partenza e con $\mathbf{N_2}$ quello del sistema ortogonale trasformato, e si ricava la relazione C tra correnti e tensioni.

$$N_2 \begin{bmatrix} I_D \\ I_Q \\ I_\Gamma \end{bmatrix} = [H] N_1 \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_\Gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{N_1}{N_2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \cos\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -sen(\theta_0) & -sen\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -sen\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \\ k & k & k \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

$$i_{DQ\Gamma} = C\ i_{ABC} \quad , \quad v_{DQ\Gamma} = C\ v_{ABC}$$

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI C

Nell'espressione di C si possono scegliere arbitrariamente i parametri k e N_2 in modo che si conservino le potenze elettriche complessive nei sistemi trasformati:

$$\left[v_{DQ\Gamma}\right]^T \times \left[i_{DQ\Gamma}\right] = \left[v_{ABC}\right]^T \times [C]^T \times [C] \times \left[i_{ABC}\right]$$

Si deve quindi imporre che **C** sia una matrice ortogonale:

$$[C]^T \times [C] = [I]$$

Si verifica che questa condizione è soddisfatta se:

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ ;\ k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE C

$$[C]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \cos\left(\theta_0-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_0-\frac{4\pi}{3}\right) \\ -sen(\theta_0) & -sen\left(\theta_0-\frac{2\pi}{3}\right) & -sen\left(\theta_0-\frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Questa trasformazione garantisce che nella trasformazione si conservino le distribuzioni di forze magnetomotrici (e di campi magnetici) e le potenze elettriche.

Esempio: trasformazione di correnti

Si vuole trasformare un sistema trifase di correnti di pulsazione ω in un sistema di riferimento in quadratura rotante alla pulsazione ω_0.

$$i_A = I\cos\omega t \; ; \quad i_B = I\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \; ; \quad i_C = I\cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_\Gamma \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega_0 t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -sen(\omega_0 t) & -sen\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & -sen\left(\omega_0 t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

$$i_D = \sqrt{\frac{3}{2}} I\cos(\omega - \omega_0)t \; ; \quad i_Q = \sqrt{\frac{3}{2}} I\,sen(\omega - \omega_0)t \; ; \quad i_\Gamma = 0$$

Nel caso in cui $\omega_0 = \omega$:

$$i_D = \sqrt{\frac{3}{2}} I \; ; \quad i_Q = 0 \; ; \quad i_\Gamma = 0$$

Nel nuovo riferimento le grandezze da alternate sono diventate costanti.

Trasformazione delle impedenze

$$\left[v_{ABC}\right] = Z_{ABC} \times \left[i_{ABC}\right]$$

$$v_{DQ\Gamma} = C\,v_{ABC} = \boxed{C\,Z_{ABC}\,C^{T}}\,i_{DQ\Gamma}$$

$$\boxed{Z_{DQ\Gamma} = C Z_{ABC} C^{T}}$$