MACCHINE ELETTRICHE

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Anno Accademico 2015-2016

MACCHINE ELEMENTARI

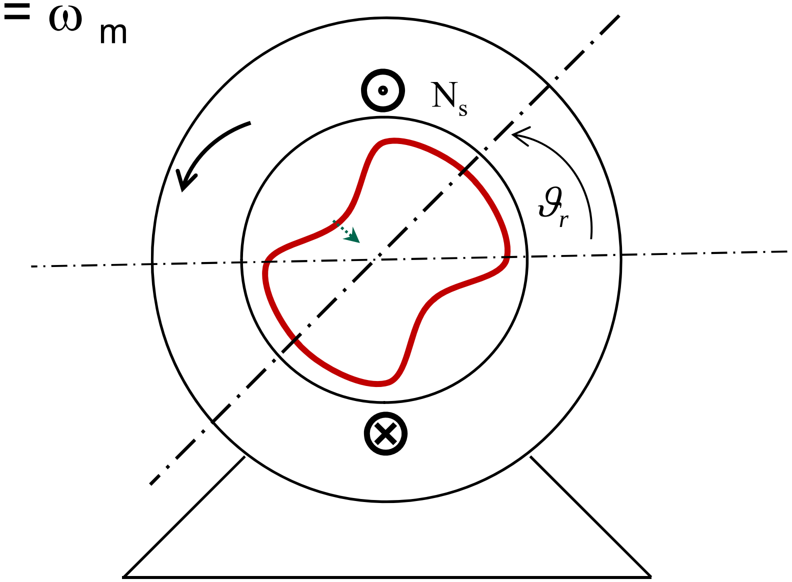
Docente Francesco Benzi
Università di Pavia
e-mail: fbenzi@unipv.it

Dispense in collaborazione con
Giovanni Petrecca e Lucia Frosini

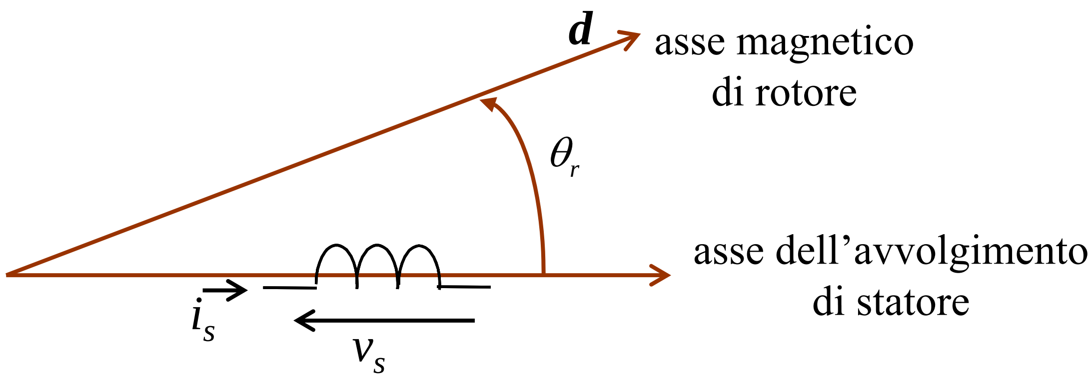
MACCHINA ELEMENTARE CON UN SOLO AVVOLGIMENTO

Si consideri una macchina elementare con un solo avvolgimento concentrato sullo statore e sul rotore:

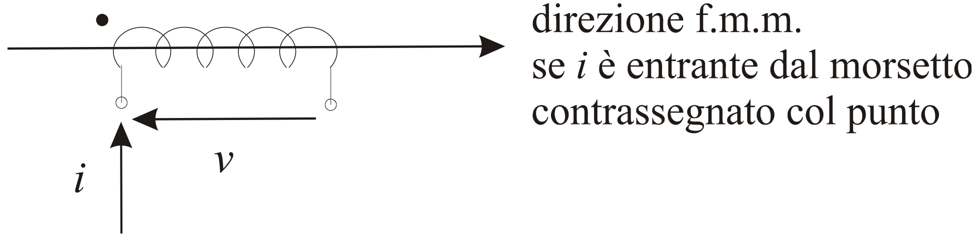
- statore cilindrico
- rotore a poli salienti
- un avvolgimento sullo statore
- 2 poli $\Rightarrow$ pp = 1 $\Rightarrow$ $\theta_r = \theta_m \Rightarrow$ $\omega_r = \omega_m$



La macchina può essere schematizzata come un avvolgimento concentrato lungo l'asse avvolgimento di statore, mentre la direzione del rotore è individuata da un asse *d* in moto rispetto allo di statore.



N.B.: convenzione:



Vogliamo trovare l'espressione della **coppia istantanea al traferro $C_e(t)$** e della **coppia media al traferro C_{media}** tramite un **bilancio energetico**, utilizzando:

- **EQUAZIONE ELETTRICA**

$$\boxed{v_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}}$$

- **EQUAZIONE MECCANICA**

$$\boxed{C_e - C_r = J\frac{d\omega_m}{dt}}$$

EQUAZIONE ELETTRICA

$$\boxed{v_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}}$$

dove:

$\boldsymbol{\psi_s} = \mathbf{L_s}\ \mathbf{i_s}$ = totale flusso concatenato con l'avvolgimento di statore

$\mathbf{L_s}$ = autoinduttanza dell'avvolgimento di statore, funzione di $\boldsymbol{\theta_r}$

$$\Rightarrow \quad v_s = R_s i_s + \frac{d L_s i_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad v_s = R_s i_s + L_s \frac{d i_s}{dt} + i_s \frac{d L_s(\theta_r)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad v_s = R_s i_s + \underbrace{L_s \frac{d i_s}{dt}}_{\text{F.E.M. di tipo trasformatorico}} + \underbrace{\omega_r i_s \frac{d L_s}{d\theta_r}}_{\text{F.E.M. di tipo rotazionale}}$$

EQUAZIONE ELETTRICA IN ALCUNI CASI PARTICOLARI

Statore e rotore cilindrici:

$$L_s = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \omega_r i_s \frac{dL_s}{d\theta_r} = 0$$

Statore cilindrico e rotore a poli salienti :

$$L_s = L_{s1} + L_{s2} \cos 2\theta_r$$

$$\Rightarrow \quad \omega_r i_s \frac{dL_s}{d\theta_r} = -2\omega_r i_s L_{s2} \sin 2\theta_r$$

→ è il caso che stiamo esaminando

EQUAZIONE MECCANICA

$$\boxed{C_e - C_r = J \frac{d\omega_m}{dt}}$$

dove:

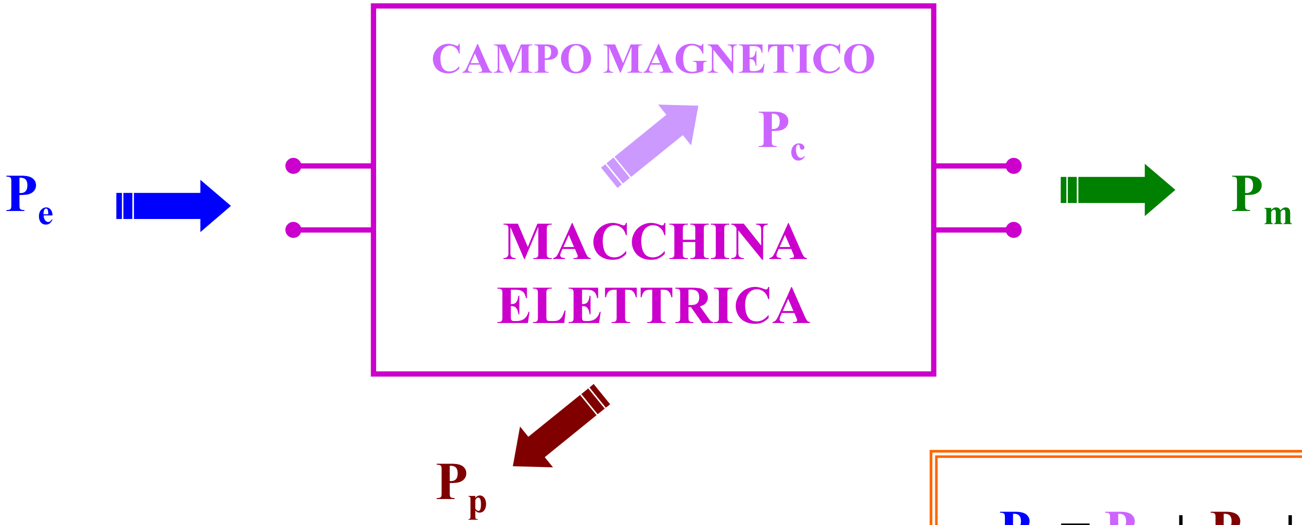
Ce = Ce(t) = coppia istantanea al traferro (**coppia elettromagnetica**), positiva se agisce in senso concorde con la velocità $\boldsymbol{\omega_m}$

$\mathbf{C_r}$ = **coppia resistente**, positiva se agisce in senso opposto alla velocità $\boldsymbol{\omega_m}$

$J \frac{d\omega_m}{dt}$ = **coppia di inerzia**

$\omega_m = \omega_r$ perché pp =1

BILANCIO ENERGETICO



$$P_e = P_c + P_p + P_m$$

P_e = **potenza elettrica** positiva se entrante

P_p = **potenza perduta** positiva se uscente

P_m = **potenza meccanica** positiva se uscente

P_c = **potenza magnetica** positiva se uscente verso il campo magnetico

N.B.: Sono tutte potenze istantanee

BILANCIO ENERGETICO

$$\boxed{P_e = \frac{dW_e}{dt} = v_s i_s}$$

Sostituendo a $\mathbf{v_s}$ l'espressione data dall'equazione di funzionamento elettrico:

$$\underbrace{v_s i_s}_{P_e} = \underbrace{R_s i_s^2}_{P_p} + \underbrace{i_s L_s \frac{di_s}{dt} + i_s^2 \frac{dL_s}{dt}}_{P_c + P_m}$$

P_e = potenza elettrica

P_p = potenza perduta nell'avvolgimento

P_c + P_m = potenza accumulata nel campo magnetico + **potenza meccanica**

BILANCIO ENERGETICO

Per separare P_m e P_c :

• è nota l'espressione dell'energia magnetica accumulata nel campo magnetico sostenuto dalla corrente i_s che circola nel circuito di induttanza L_s :

$$W_c = \frac{1}{2} L_s i_s^2$$

• la corrispondente potenza istantanea vale:

$$P_c = \frac{dW_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_s i_s^2\right) = L_s i_s \frac{di_s}{dt} + \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{dt}$$

• si scrive il bilancio delle potenze nel seguente modo:

$$\boxed{v_s i_s} = \underbrace{R_s i_s^2}_{P_p} + \underbrace{L_s i_s \frac{di_s}{dt} + \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{dt}}_{P_c} + \boxed{\frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{dt}}$$

P_e = potenza elettrica

P_p = potenza perduta nell'avvolgimento

P_c = potenza accumulata nel campo magnetico

P_m = potenza meccanica

COPPIA ISTANTANEA AL TRAFERRO

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{dt} = \frac{1}{2} i_s^2 \omega_r \frac{dL_s}{d\theta_r}}$$

P_m = potenza meccanica

Coppia istantanea al traferro:

$$\boxed{C_e(t) = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{pp}{\omega_r} P_m}$$

Sostituendo a $\mathbf{P_m}$ l'espressione trovata per la potenza meccanica:

$$\boxed{C_e(t)} = \frac{pp}{\omega_r} \frac{1}{2} i_s^2 \omega_r \frac{dL_s}{d\theta_r} = \boxed{pp \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r}}$$

dove: pp = paia poli

$\omega_r = pp\, \omega_m$

nel nostro caso: $pp = 1$

$\omega_r = \omega_m$

COPPIA ISTANTANEA AL TRAFERRO

$$\boxed{C_e(t) = pp\,\frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta_r}}$$

Osserviamo che, nel caso di statore e rotore cilindrici:

$L_s = \text{costante}$ ➡ $C_e(t) = 0$

Invece, nel caso di statore a poli salienti e rotore cilindrico:

$$L_s = L_{s1} + L_{s2}\cos 2\theta_r$$

➡ $$C_e(t) = pp\,\frac{1}{2} i_s^2 \left(-2L_{s2}\sin 2\theta_r\right)$$

→ è il caso che stiamo esaminando

La coppia istantanea $C_e(t)$ è diversa da zero se almeno una delle due strutture è anisotropa e se l'avvolgimento si trova sulla struttura cilindrica.

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

La **coppia istantanea $C_e(t)$** è legata alla potenza istantanea.

La **coppia media C_{media}** è definita come il valore medio della coppia istantanea:

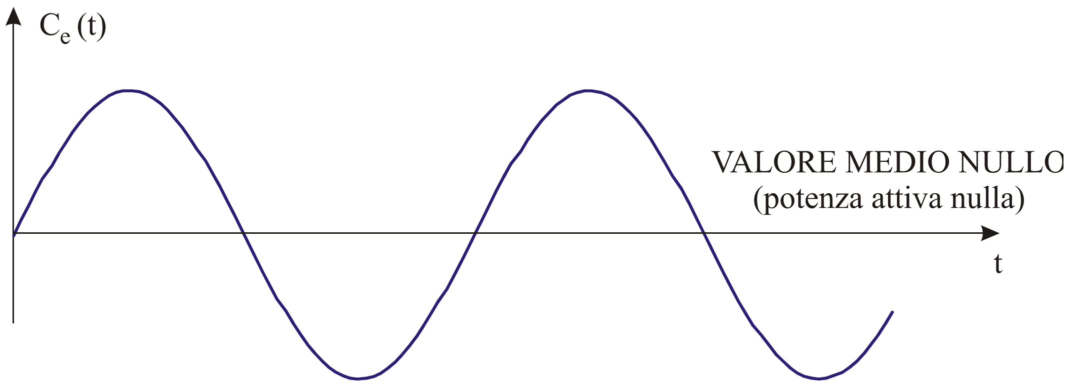
$$\boxed{C_{media} = \int_0^\infty C_e(t)dt}$$

La **coppia media C_{media}** è legata alla potenza attiva P_{attiva}, e cioè al valore medio della potenza istantanea:

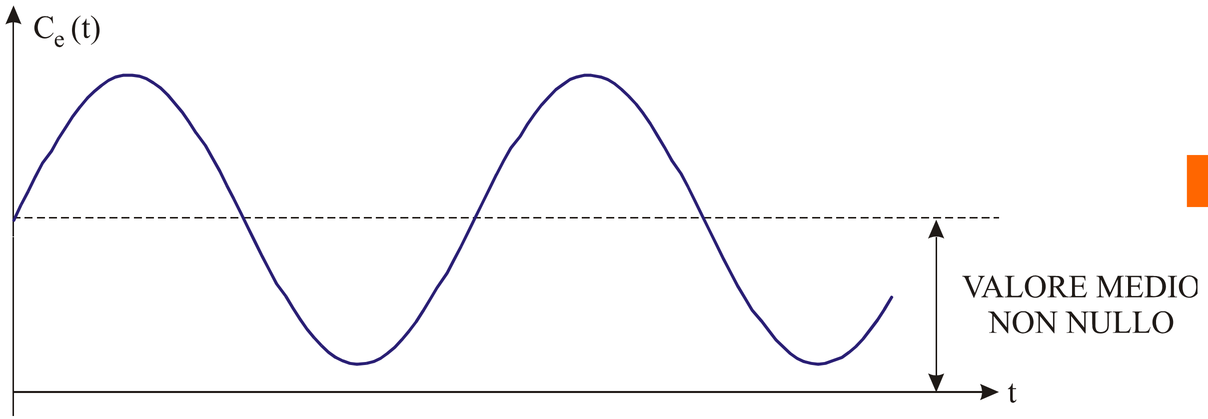
$$\boxed{C_{media} = \frac{(pp)}{\omega_r} P_{attiva}}$$

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

A seconda dell'andamento della **coppia istantanea $C_e(t)$**, la **coppia media C_{media}** può essere uguale o diversa da zero:



$$C_{media} = 0$$



$$C_{media} \neq 0$$

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

Nel caso di statore cilindrico e rotore a poli salienti, l'espressione della **coppia istantanea $C_e(t)$** è:

$$C_e(t) = pp\,\frac{1}{2} i_s^2 \left(-2L_{s2}\sin 2\theta_r\right)$$

Esiste una **coppia media C_{media}** diversa da zero a seconda dei valori che assume la corrente $i_s(t)$.

Se $i_s(t)$ = costante = I :

$$C_e(t) = pp\,\frac{1}{2} I^2 \left(-2L_{s2}\sin 2\theta_r\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_{media} = \int_0^{\infty} C_e(t)dt = 0$$

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

Se $i_s(t) = I_M \cos \omega t$

si verifica che può esistere esiste una **coppia media C_{media}** diversa da zero se e solo se la corrente ha pulsazione $\omega = \omega_r$ e se $\delta \neq 0$.

L'angolo tra l'asse avvolgimento di statore all'istante t e l'asse magnetico di rotore d è dato da:

$$\boxed{\theta_r = \omega_r t - \delta}$$

δ rappresenta la posizione iniziale dell'asse avvolgimento di statore rispetto all'asse magnetico di rotore d.

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

$$i_s(t) = I_M \cos\omega t$$

$$i_s^2(t) = I_M^2 \cos^2\omega t = \frac{1}{2} I_M^2 \left(1 + \cos 2\omega t\right)$$

Supponiamo che pp = 1 e quindi $\omega = \omega_r$:

$$C_e(t) = pp\,\frac{1}{2} i_s^2 \left(-2L_{s2} \sin 2\theta_r\right) = -\,i_s^2 L_{s2} \sin 2\theta_r$$

$$C_e(t) = -\,\frac{1}{2} I_M^2 \left(1 + \cos 2\omega t\right) L_{s2} \sin 2\underbrace{\left(\omega t - \delta\right)}_{\theta_r}$$

$$C_e(t) = -\,\frac{1}{2} I_M^2 L_{s2} \left[\sin 2\left(\omega t - \delta\right) + \sin 2\left(\omega t - \delta\right) \cos 2\omega t\right]$$

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

Ricordando che:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B)$$

$$C_e(t) = -\frac{1}{2} I_M^2 L_{s2}\left[\underbrace{\sin 2(\omega t - \delta)}_{①} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin(4\omega t - 2\delta)}_{②} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin(-2\delta)}_{③}\right]$$

I termini ① e ② sono a valore medio nullo e pulsanti a frequenza doppia e quadrupla di quella di alimentazione.

Il termine ③ dipende solo da δ (se $\omega = \omega_r$).

$$\boxed{C_{media}} = -\frac{1}{2} I_M^2 L_{s2}\left[\frac{1}{2}\sin(-2\delta)\right] = \boxed{\frac{1}{4} I_M^2 L_{s2} \sin 2\delta}$$

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

$$\boxed{C_{media} = \frac{1}{4} I_M^2 L_{s2} \sin 2\delta}$$

$$C_{media} \neq 0 \quad \text{per} \quad \delta \neq 0 \pm k\frac{\pi}{2}$$

$$C_{media} \quad \text{è massima per} \quad \delta = \frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2}$$

OSSERVAZIONI:

• La macchina non può avviarsi da sola (non è autoavviante).

• Esiste una coppia media diversa da zero solo se la macchina funziona alla velocità $\omega_m = \omega_r = \omega$ (pp=1) e se esiste uno sfasamento δ tra l'asse magnetico di statore *d* e l'asse avvolgimento di rotore per t = 0.

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

Poiché $i_s(t) = I_M \cos\omega t$

la corrente di statore è massima per t = 0, e quindi per $\theta_r = -\delta$, e così anche la distribuzione di f.m.m. di rotore.

Quindi, per $t \neq 0$ e per corrente i(t) non massima, la macchina deve essere portata in rotazione (trascinata da un motore esterno).

È anche possibile in alternativa sfasare la corrente nel tempo di un angolo δ e fare in modo che per t = 0 gli assi di rotore e statore coincidano:

$$\begin{cases} i_s(t) = I_M \cos(\omega t + \delta) \\ \theta_r = \omega_r t \quad \Rightarrow \quad \text{per } t = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_r = 0 \end{cases}$$

In questo modo, per t = 0 la distribuzione di f.m.m. ha il valore massimo, ma non così la corrente $i_s(t)$.

COPPIA MEDIA AL TRAFERRO

$$i_s(t) = I_M \cos(\omega t + \delta)$$

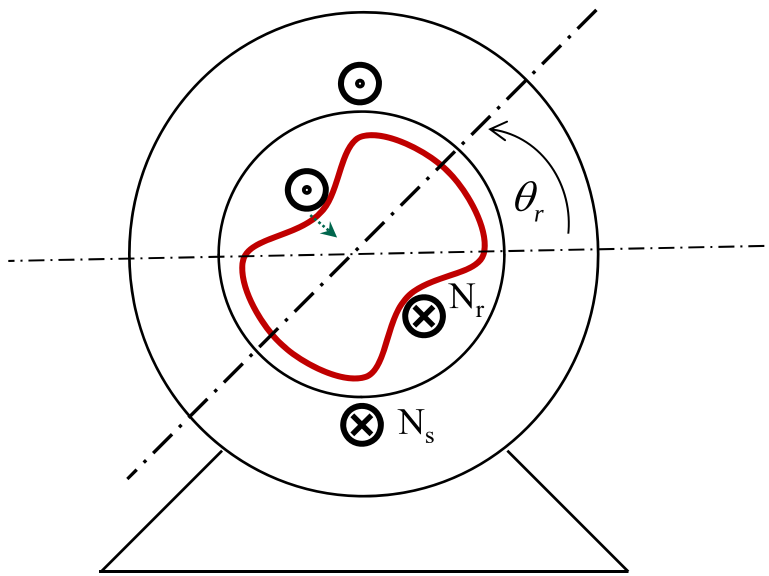
$$i_s^2(t) = I_M^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} I_M^2 \left[1 + \cos(2\omega t + 2\delta)\right]$$

$$C_e(t) = -\frac{1}{2} I_M^2 L_{s2} \left[\sin 2\omega t + \underbrace{\sin 2\omega t \cos(2\omega t + 2\delta)}_{\frac{1}{2}\sin(4\omega t + 2\delta) + \frac{1}{2}\sin(-2\delta)}\right]$$

CONCLUSIONE

In linea teorica è possibile ottenere una coppia elettromagnetica a valor medio diverso da zero anche in presenza di un solo avvolgimento, purché si verifichino le condizioni descritte, tuttavia tale coppia è oscillante con valori di oscillazione dello stesso ordine del valore medio della coppia, pertanto la velocità della macchina sarebbe sottoposta a oscillazioni e vibrazioni di entità tale da renderne impossibile l'impiego pratico

MACCHINA ELEMENTARE a due avvolgimenti



$$\theta_r = \omega_r t - \delta$$

Una delle strutture è in generale anisotropa (rotore)

Due equazioni elettriche e l'equazione meccanica

$$[v] = [R][i] + [L]\frac{d[i]}{dt} + \omega_r \frac{d[L]}{d\theta_r}[i]$$

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = C_e - C_r$$

Scrittura in forma matriciale (indice s e r per statore e rotore):

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \omega_r \frac{d}{d\theta_r}\begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = C_e - C_r$$

Scrittura per esteso:

$$\begin{cases} v_s = R_s i_s + L_s \dfrac{di_s}{dt} + L_{sr} \dfrac{di_r}{dt} + \omega_r i_s \dfrac{dL_s}{d\theta_r} + \omega_r i_r \dfrac{dL_{sr}}{d\theta_r} \\ v_r = R_r i_r + L_r \dfrac{di_r}{dt} + L_{rs} \dfrac{di_s}{dt} + \omega_r i_r \dfrac{dL_r}{d\theta_r} + \omega_r i_s \dfrac{dL_{rs}}{d\theta_r} \end{cases}$$

Il bilancio energetico (si moltiplica a sinistra per le correnti):

$$[i]^T [v] = [i]^T [R][i] + [i]^T [L]\frac{d[i]}{dt} + \omega_r [i]^T \frac{d[L]}{d\theta_r}[i]$$

Espressione dell'energia magnetica per un sistema a n avvolgimenti:

$$W_c = \frac{1}{2}[i]^T [L][i]; \qquad P_c = \frac{dW_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[i]^T}{dt}[L][i] + \frac{1}{2}[i]^T \omega_r \frac{d[L]}{d\theta_r}[i] + \frac{1}{2}[i]^T [L]\frac{d[i]}{dt}$$

Si ricorda che se L è simmetrica:

$$\frac{d[i]^T}{dt}[L][i] = [i]^T [L]\frac{d[i]}{dt}$$

e quindi:

$$P_c = [i]^T [L]\frac{d[i]}{dt} + \frac{1}{2}\omega_r [i]^T \frac{d[L]}{d\theta_r}[i]$$

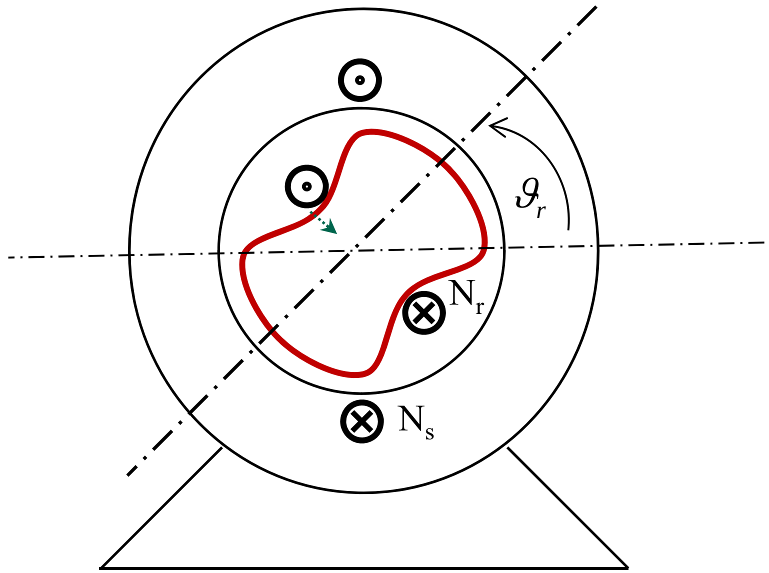
Per differenza si ottiene infine l'espressione della potenza meccanica:

$$P_m = \frac{1}{2}\omega_r [i]^T \frac{d[L]}{d\theta_r}[i]$$

L'espressione della coppia risulta allora:

$$C_e = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{1}{2}\frac{\omega_r}{\omega_m}\begin{bmatrix} i_s & i_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{dL_s}{d\theta_r} & \dfrac{dL_{sr}}{d\theta_r} \\ \dfrac{dL_{rs}}{d\theta_r} & \dfrac{dL_r}{d\theta_r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(pp)\left(i_s{}^2 \frac{dL_s}{d\theta_r} + i_r{}^2 \frac{dL_r}{d\theta_r} + 2 i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta_r} \right)$$



Nel caso in esame si ricordano gli andamenti delle induttanze:

$$L_s = L_{s1} + L_{s2} \cos 2\theta_r$$

$$L_r = \text{cost}$$

$$L_{sr} = M \cos\theta_r$$

Sostituendo i rispettivi valori la coppia risulta:

$$C_e = -(pp)\left[L_{s2}\, \text{sen}\, 2\theta_r \cdot i_s^{\,2} + M\, \text{sen}\, \theta_r \cdot i_s i_r \right]$$

Coppia di anisotropia

Coppia cilindrica

L'andamento della coppia è legato a quello delle correnti

Caso I

$$i_s(t) = \text{cost} = I_s;\; i_r(t) = \text{cost} = I_r$$

$$C_e = -(pp)\left[L_{s2}\,\text{sen}\,2\theta_r \cdot I_s^{\,2} + M\,\text{sen}\,\theta_r \cdot I_s I_r\right]$$

Entrambi i termini di coppia danno un contributo di coppia media nulla

L'andamento della coppia è legato a quello delle correnti

Caso II

$$i_s(t) = I_s \cos\omega t;\ i_r(t) = \text{cost} = I_r$$

$$\theta_r = \omega_r t - \delta$$

$$C_e = -\frac{(pp)}{2} L_{s2} I_s^{\,2} \left[\text{sen}\left(2\omega_r t - 2\delta\right) + \frac{1}{2}\text{sen}\left(2\left(\omega_r + \omega\right)t - 2\delta\right) + \frac{1}{2}\text{sen}\left(2\left(\omega_r - \omega\right)t - 2\delta\right) \right] +$$

$$-\frac{(pp)}{2} L_{sr} I_s I_r \left[\text{sen}\left(\left(\omega_r + \omega\right)t - \delta\right) + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\left(\omega_r - \omega\right)t - \delta\right) \right]$$

Solo per $\omega = \omega_r$ risulta una coppia media non nulla:

$$C_{em} = \frac{(pp)}{4} I_s L_{s2} \,\text{sen}\, 2\delta + \frac{(pp)}{2} L_{sr} I_s I_r \,\text{sen}\,\delta$$

Caso III

$$i_s(t) = I_s \cos \omega_1 t; \;\; i_r(t) = I_r \cos \omega_2 t$$

Per la coppia di anisotropia vale quanto visto nel caso precedente. Per la coppia cilindrica:

$$C_{cil}(t) = -(pp)L_{sr}I_sI_r \operatorname{sen}\left(\omega_r - \delta\right)\cdot \cos\omega_1 t \cdot \cos\omega_2 t =$$

$$= -\frac{(pp)}{2}L_{sr}I_sI_r \operatorname{sen}\left(\omega_r - \delta\right)\cdot\left[\cos\left(\omega_1 + \omega_2\right)t + \cos\left(\omega_1 - \omega_2\right)t\right] =$$

$$= -\frac{(pp)}{4}L_{sr}I_sI_r \Big\{ \operatorname{sen}\left[\left(\omega_r + \left(\omega_1 + \omega_2\right)\right)t - \delta\right]\cdot \operatorname{sen}\left[\left(\omega_r - \left(\omega_1 + \omega_2\right)\right)t - \delta\right] +$$

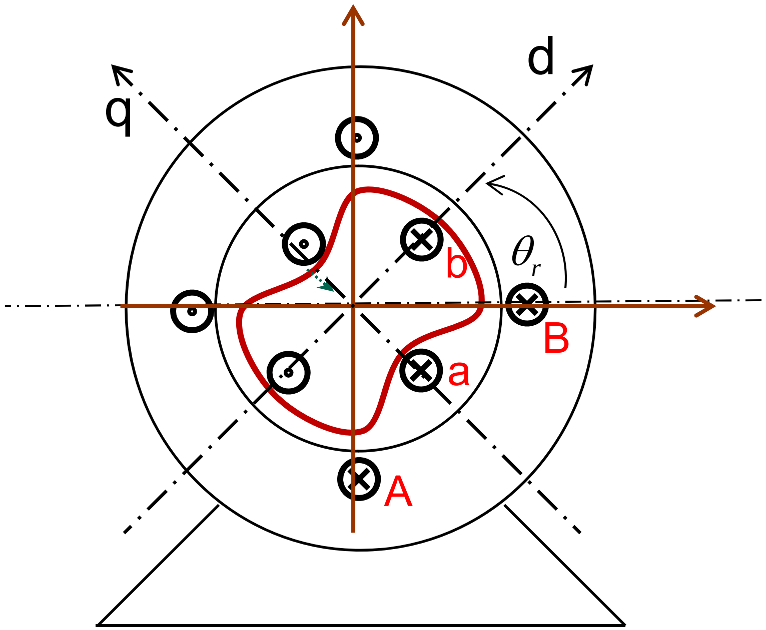
$$+ \operatorname{sen}\left[\left(\omega_r + \left(\omega_1 - \omega_2\right)\right)t - \delta\right]\cdot \operatorname{sen}\left[\left(\omega_r - \left(\omega_1 - \omega_2\right)\right)t - \delta\right] \Big\}$$

Solo per $\omega_1 + \omega_2 = \omega_r$ risulta una coppia media non nulla:

Espressione generale della coppia

$$C_e(t) = \frac{(pp)}{2}[i]^T \frac{d[L]}{d\theta}[i]$$

Macchina elementare a 4 avvolgimenti



$$[v]=[R][i]+[L]\frac{d[i]}{dt}+\omega_r\frac{d[L]}{d\theta_r}[i]$$

$$J\frac{d\omega_m}{dt}=C_e-C_r \qquad \theta_r=\omega_r t-\delta$$

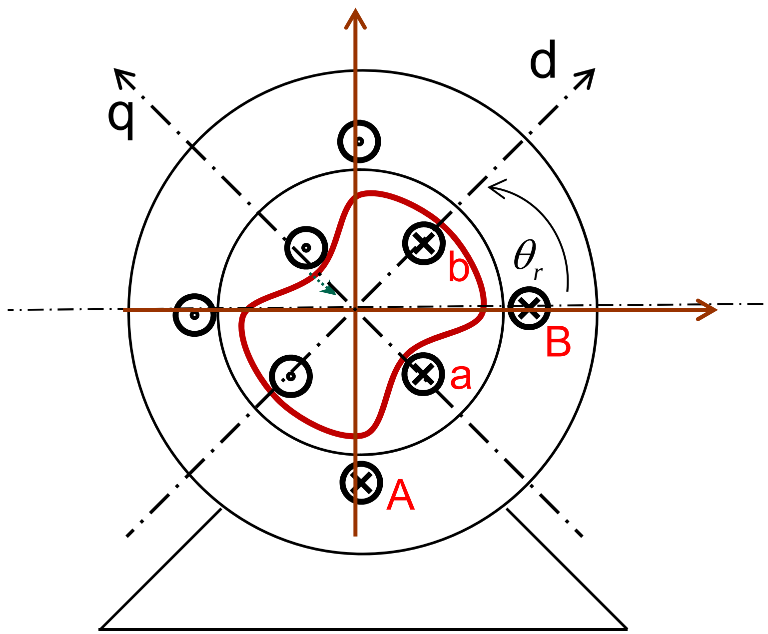
Macchina elementare a 4 avvolgimenti

$$\begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & L_{Aa} & L_{Ab} \\ L_{BA} & L_B & L_{Ba} & L_{Bb} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_a & L_{ab} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{ba} & L_b \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega_r \frac{d}{d\theta_r} \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & L_{Aa} & L_{Ab} \\ L_{BA} & L_B & L_{Ba} & L_{Bb} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_a & L_{ab} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{ba} & L_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Macchina elementare a 4 avvolgimenti

Per la macchina in esame le induttanze in funzione di θ_r risultano:



$$L_A = L_1 + L_2 \cos 2\theta_r \qquad L_a = \text{cost}$$

$$L_B = L_1 - L_2 \cos 2\theta_r \qquad L_b = \text{cost}$$

$$L_{AB} = L_{BA} = L_2 \,\text{sen}\, 2\theta_r \qquad L_{ab} = L_{ba} = 0$$

$$L_{Aa} = L_{aA} = M_1 \cos \theta_r \qquad L_{Ab} = L_{bA} = -M_1 \,\text{sen}\, \theta_r$$

$$L_{Ba} = L_{aB} = M_1 \,\text{sen}\, \theta_r \qquad L_{Bb} = L_{bB} = M_1 \cos \theta_r$$

Espressione della Coppia elettromagnetica

$$C_e = \frac{1}{2}(pp)\begin{bmatrix} i_A & i_B & | & i_a & i_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & | & L_{Aa} & L_{Ab} \\ L_{BA} & L_B & | & L_{Ba} & L_{Bb} \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots \\ L_A & L_A & | & L_A & L_A \\ L_A & L_A & | & L_A & L_A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ \cdots \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Che può essere scritta sinteticamente:

$$C_e = \frac{1}{2}(pp)\begin{bmatrix} i_{AB} & | & i_{ab} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{AB} & | & G_{ABab} \\ \cdots & | & \cdots \\ G_{abAB} & | & G_{ab} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{AB} \\ \cdots \\ i_{ab} \end{bmatrix}$$

dove si sono usate le notazioni:

$$i_{AB} = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \qquad e \qquad G_{AB} = \frac{d}{d\theta_r}\begin{bmatrix} L_A & L_{AB} \\ L_{BA} & L_B \end{bmatrix} \quad ecc.$$

Espressione della Coppia elettromagnetica

Sostituendo i valori delle induttanze si ottiene:

$$C_e = \frac{1}{2}(pp)\begin{bmatrix} i_A & i_B & | & i_a & i_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2L_2 \operatorname{sen} 2\theta_r & 2L_2 \cos 2\theta_r & | & -M_1 \operatorname{sen} \theta_r & -M_2 \cos \theta_r \\ 2L_2 \cos 2\theta_r & 2L_2 \operatorname{sen} 2\theta_r & | & M_1 \cos \theta_r & -M_2 \operatorname{sen} \theta_r \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots \\ -M_1 \operatorname{sen} \theta_r & M_1 \cos \theta_r & | & 0 & 0 \\ -M_2 \cos \theta_r & -M_2 \operatorname{sen} \theta_r & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ \dots \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Espressione della Coppia elettromagnetica

Scrivendo l'espressione della coppia in funzione delle sottomatrici:

$$C_e = \frac{(pp)}{2}\left\{[i_{AB}]^T[G_{AB}][i_{AB}] + [i_{ab}]^T[G_{abAB}][i_{AB}] + [i_{AB}]^T[G_{ABab}][i_{ab}]\right\}$$

Sostituendo infine i valori delle induttanze:

Coppia di anisotropia

$$C_e = (pp)[L_2 \operatorname{sen} 2\theta_r \left(i_B{}^2 - i_A{}^2\right) + 2L_2 \cos 2\theta_r \cdot i_A i_B +$$

$$+ M_1 i_a \left(i_B \cos\theta_r - i_A \operatorname{sen}\theta_r\right) - M_2 i_b \left(i_A \cos\theta_r + i_B \operatorname{sen}\theta_r\right)$$

Coppia cilindrica

Equazioni della macchina in un sistema di riferimento solidale con il rotore

Si utilizza il concetto di trasformazione.

Per lo statore la trasformazione avviene utilizzando la matrice C_0

Per il rotore non è necessaria alcuna trasformazione; per generalità si trasformeranno le grandezze con una matrice identità I.

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \mathrm{sen}(\theta_0) \\ -\mathrm{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel nuovo sistema di riferimento di possono utilizzare gli indici D, Q, d, q rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = [C_0] \times \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = [I] \times \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Equazioni della macchina nel sistema originario

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_{AB} \\ \dots \\ v_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AB} & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & R_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{AB} \\ \dots \\ i_{ab} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{AB} \\ \dots \\ \psi_{ab} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{AB} \\ \dots \\ \psi_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AB} & \vdots & L_{ABab} \\ \dots & & \dots \\ L_{abAB} & \vdots & L_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{AB} \\ \dots \\ i_{ab} \end{bmatrix}$$

Equazioni della macchina nel sistema originario

$$[v_{AB}] = [R_{AB}][i_{AB}] + \frac{d}{dt}[\psi_{AB}] \qquad [\psi_{AB}] = [L_{AB}][i_{AB}] + [L_{ABab}][i_{ab}]$$

$$[v_{ab}] = [R_{ab}][i_{ab}] + \frac{d}{dt}[\psi_{ab}] \qquad [\psi_{ab}] = [L_{abAB}][i_{AB}] + [L_{ab}][i_{ab}]$$

Moltiplicando a sinistra per C_0 e ricordando che $C_0{}^T C_0 = I$

$$[C_0][v_{AB}] = [C_0][R_{AB}][C_0]^T[C_0][i_{AB}] + [C_0]\frac{d}{dt}[\psi_{AB}]$$

$$[v_{dq}] = [R_{dq}][i_{dq}] + \frac{d}{dt}[\psi_{dq}]$$

Equazioni della macchina nel sistema originario

Per trasformare le derivate dei flussi si deve osservare che:

$$\left[C_0\right]\frac{d\left[\psi_{AB}\right]}{d\theta_r}=\left[C_0\right]\frac{d\left[C_0\right]^T\left[\psi_{DQ}\right]}{d\theta_r}=$$

$$=\left[C_0\right]\left[C_0\right]^T\frac{d\left[\psi_{AB}\right]}{d\theta_r}+\left[C_0\right]\frac{d\left[C_0\right]^T}{d\theta_r}\left[\psi_{DQ}\right]=$$

$$=\frac{d\left[\psi_{AB}\right]}{d\theta_r}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left[\psi_{DQ}\right]$$

Equazioni della macchina nel sistema trasformato

$$\left[v_{DQ}\right]=\left[R_{DQ}\right]\left[i_{DQ}\right]+\frac{d}{dt}\left[\psi_{DQ}\right]+\omega_r\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left[\psi_{DQ}\right]$$

$$\left[v_{dq}\right]=\left[R_{dq}\right]\left[i_{dq}\right]+\frac{d}{dt}\left[\psi_{dq}\right]$$

$$\left[\psi_{DQ}\right]=\left[L_{DQ}\right]\left[i_{DQ}\right]+\left[L_{DQdq}\right]\left[i_{dq}\right]$$

$$\left[\psi_{dq}\right]=\left[L_{dqDQ}\right]\left[i_{DQ}\right]+\left[L_{dq}\right]\left[i_{dq}\right]$$

Equazioni della macchina nel sistema trasformato

Si ottiene infine:

$$[v_{DQ}] = [R_{DQ}][i_{DQ}] + [L_{DQ}]\frac{d[i_{DQ}]}{dt} + [L_{DQdq}]\frac{d[i_{dq}]}{dt} +$$

$$+\ \omega_r \left(\frac{d[L_{DQ}]}{d\theta_r}[i_{DQ}] + \frac{d[L_{DQdq}]}{d\theta_r}[i_{dq}] \right) + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left([L_{DQ}][i_{DQ}] + [L_{DQdq}][i_{dq}]\right)$$

$$[v_{dq}] = [R_{dq}][i_{dq}] + [L_{dqDQ}]\frac{d[i_{DQ}]}{dt} + [L_{dq}]\frac{d[i_{dq}]}{dt} + \omega_r \left(\frac{d[L_{dqDQ}]}{d\theta_r}[i_{DQ}] + \frac{d[L_{dq}]}{d\theta_r}[i_{dq}] \right)$$

Equazioni della macchina nel sistema trasformato

Sostituendo alle sottomatrici i rispettivi valori:

$$\begin{bmatrix} v_D \\ v_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Equazioni della macchina nel sistema trasformato

$$v_D = R_1 i_D + L_D \frac{di_D}{dt} + M_1 \frac{di_d}{dt} - \omega_r \left[L_Q i_Q + M_2 i_q \right]$$

$$v_Q = R_1 i_Q + L_Q \frac{di_Q}{dt} + M_2 \frac{di_q}{dt} + \omega_r \left[L_D i_D + M_1 i_d \right]$$

$$v_d = R_2 i_d + L_d \frac{di_d}{dt} + M_1 \frac{di_D}{dt}$$

$$v_q = R_2 i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + M_2 \frac{di_Q}{dt}$$

Equazioni della macchina nel sistema trasformato

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_D \\ v_Q \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & L_Q & 0 & M_2 \\ M_1 & 0 & L_d & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -L_Q & 0 & -M_2 \\ L_D & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

Espressione della coppia nel sistema originario

Si considera una matrice di trasformazione complessiva C_2 comprendente sia la trasformazione di statore (sottomatrice in alto a sinistra), sia quella di rotore (sottomatrice in basso a destra), quest'ultima coincide con la matrice identità I perché il sistema di riferimento scelto è proprio quello di rotore:

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_0 & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r & 0 & 0 \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Espressione della coppia nel sistema originario

$$C_e = \frac{(pp)}{2}\left\{\left[i_{ABab}\right]^T \frac{d\left[L_{ABab}\right]}{d\theta_r}\left[i_{ABab}\right]\right\} =$$

$$= \frac{(pp)}{2}\left\{\left[i_{ABab}\right]^T\left[C_2\right]^T\left[C_2\right]\frac{d\left[L_{ABab}\right]}{d\theta_r}\left[C_2\right]^T\left[C_2\right]\left[i_{ABab}\right]\right\} =$$

$$= \frac{(pp)}{2}\left\{\left[i_{DQdq}\right]^T\left[C_2\right]\frac{d\left[L_{ABab}\right]}{d\theta_r}\left[C_2\right]^T\left[i_{DQdq}\right]\right\}$$

Espressione della coppia nel sistema trasformato

$$\frac{d[L_{DQdq}]}{d\theta_r} = \frac{d}{d\theta_r}\left([C_2][L_{ABab}][C_2]^T\right) =$$

$$= [C_2]\frac{d[L_{ABab}]}{d\theta_r}[C_2]^T + \frac{d[C_2]}{d\theta_r}[L_{ABab}][C_2]^T + [C_2][L_{ABab}]\frac{d[C_2]^T}{d\theta_r}$$

$$[C_2]\frac{d[L_{ABab}]}{d\theta_r}[C_2]^T = d\frac{[L_{DQdq}]}{d\theta_r} - 2\frac{d[C_2]}{d\theta_r}[C_2]^T[L_{DQdq}]$$

Espressione della coppia nel sistema trasformato

$$C_e = -2\frac{(pp)}{2}\left[i_{DQdq}\right]^T \frac{d\left[C_2\right]}{d\theta_r}\left[C_2\right]^T\left[L_{DQdq}\right]\left[i_{DQdq}\right] = (pp)\left[i_{DQdq}\right]^T\left[G_{DQdq}\right]\left[i_{DQdq}\right]$$

in cui:

$$\left[G_{DQdq}\right] = -\frac{d\left[C_2\right]}{d\theta_r}\left[C_2\right]\left[L_{DQdq}\right]$$

Espressione della coppia nel sistema trasformato

Nel caso in esame risulta:

$$G_{DQ,dq} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_D & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & L_Q & 0 & M_2 \\ M_1 & 0 & L_d & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & L_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_Q & 0 & -M_2 \\ L_D & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ricava infine la coppia:

$$C_e = (pp)\left[((L_D - L_Q)i_D i_Q + M_1 i_Q i_d - M_2 i_D i_q\right]$$