

Corso di Elementi di Impianti e macchine elettriche

Anno Accademico 2014-2015

Esercizio n.1

Un trasformatore monofase ha i seguenti dati di targa:

Potenza nominale $A_n=10$ kVA
Tensione nominale $V_{1n}:V_{2n}=480:120$ V
Frequenza nominale $f_n = 50$ Hz

I risultati delle prove a vuoto e in corto circuito hanno fornito i seguenti risultati:

Prova a vuoto (lato bassa tensione)

$V_0=120$ V; $I_0=4$ A; potenza attiva misurata a vuoto: $P_0=75$ W

Prova in corto circuito (lato alta tensione)

$V_{cc}=48$ V; $I_{cc}=20,83$ A; potenza attiva assorbita: $P_{cc}=500$ W

1a. Si determini il circuito equivalente del trasformatore riferito al lato alta tensione.

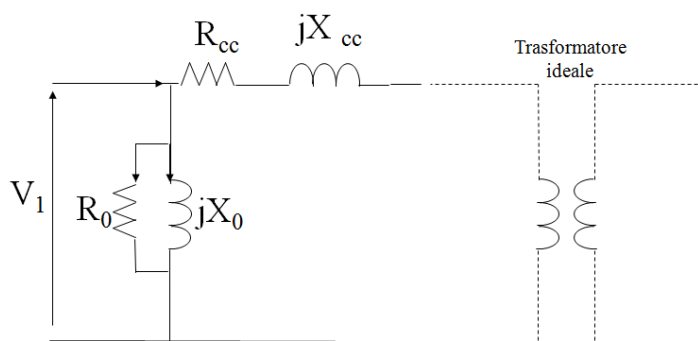
1b. Si determini la Regolazione di tensione a pieno carico.

Soluzione

Calcolo delle correnti nominali:

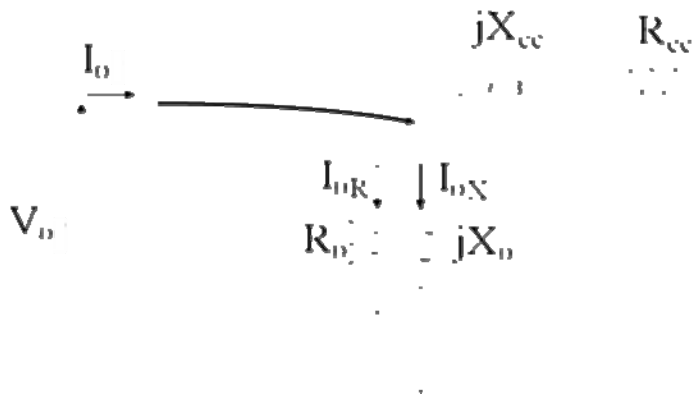
$$I_{1n} = \frac{A_n}{V_{1n}} = \frac{10 \cdot 10^3}{480} = 20,83 \text{ A}; \quad I_{2n} = \frac{A_n}{V_{2n}} = \frac{10 \cdot 10^3}{120} = 83,33 \text{ A}$$

Punto 1. Si utilizza ora il circuito equivalente semplificato in cui i parametri del ramo magnetizzante si riportano immediatamente all'ingresso del circuito, mentre i parametri di corto circuito (impedenza interna del trasformatore), si raggruppano in serie sul solo lato 1 del trasformatore, riportando ad esso, con le opportune trasformazioni anche le impedenze sul lato 2.



Calcolo dei parametri del ramo magnetizzante

Si considerino i dati della prova a vuoto, nella quale circola la sola componente I_0 sul ramo magnetizzante (parallelo di R_0 e jX_0)



Possiamo ricavare la componente resistiva R_0 e quindi la corrispondente corrente resistiva nel ramo magnetizzante.

$$R_0 = \frac{V_0^2}{P_0} = 192 \Omega; \quad I_{0R} = \frac{V_0}{R_0} = 0,625 A$$

Si può calcolare per differenza la componente reattiva e quindi la reattanza magnetizzante:

$$I_{0X} = \sqrt{I_0^2 - I_{0R}^2} = \sqrt{4^2 - 0,625^2} = 3,95 A; \quad X_0 = \frac{V_0}{I_{0X}} = \frac{120}{3,95} = 30,38 \Omega$$

Poiché le misure sono ricavate sul lato bassa tensione, vanno riportati sul lato alta tensione utilizzando la relazione in base al numero di spire:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2; \quad Z_{01} = \left(\frac{480}{120}\right)^2 = 16 \cdot Z_{02} = (3072 + j486) \Omega$$

Calcolo dei parametri del ramo trasversale (di corto circuito)

Con le misure ricavate nella prova in corto circuito, si possono ricavare i corrispondenti parametri trasversali del circuito equivalente (che rappresentano l'impedenza interna serie del trasformatore). Considerato che si utilizza il circuito semplificato, i dati si otterranno come valori complessivi della impedenza del lato 1 e del lato 2. In questo caso i dati forniti si riferiscono al lato alta tensione:

$$Z_{cc} = \frac{V_{2cc}}{I_{1n}} = \frac{48}{20,83} = 2,30 \Omega$$

$$R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2} = \frac{500}{20,83^2} = 1,15 \Omega$$

$$X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = \sqrt{2,3^2 - 1,15^2} = 1,99 \Omega$$

Da questi dati si può inoltre calcolare la corrente di corto circuito percentuale, ripartita anche nelle sue componenti resistiva e reattiva (che saranno utili per il calcolo della **regolazione di tensione**):

Esercizio n. 2

Un trasformatore monofase ha i seguenti dati di targa:

Potenza nominale	$A_n = 20 \text{ kVA}$
Tensione nominale	$V_{1n}:V_{2n} = 8000:240 \text{ V}$
Frequenza nominale	$f_n = 50 \text{ Hz}$

I risultati delle prove a vuoto e in corto circuito hanno fornito i seguenti parametri del circuito equivalente (riferiti al lato 1)

$$R_0 = 267 \text{ k}\Omega; \quad X_0 = 37,75 \text{ k}\Omega;$$

$$R_{cc}=64 \Omega; X_{cc}= 185 \Omega.$$

2a. Si calcolino i valori della corrente a vuoto percentuale e della tensione di corto circuito percentuale.

2b. Si calcoli il rendimento per un funzionamento pari al 75% del carico nominale con un fattore di potenza pari a 0,85 in ritardo.

Soluzione

Calcolo delle correnti nominali:

$$I_{1n} = \frac{A_n}{V_{1n}} = \frac{20 \cdot 10^3}{8000} = 2,5 \text{ A}; \quad I_{2n} = \frac{A_n}{V_{2n}} = \frac{20 \cdot 10^3}{240} = 83,3 \text{ A}$$

1a) Corrente a vuoto percentuale

Utilizzando il circuito equivalente semplificato si può calcolare la corrente a vuoto alla tensione nominale come somma vettoriale delle correnti circolanti rispettivamente in R_0 e X_0 :

$$\bar{I}_0 = \frac{V_{1n}}{R_0} - j \frac{V_{1n}}{X_0} = \frac{8000}{267 \cdot 10^3} - j \frac{8000}{37,75 \cdot 10^3} = 0,030 - j0,212 \text{ A} = 0,214 \angle -81,9^\circ$$

$$I_0 \% = \frac{|\bar{I}_0|}{I_{1n}} 100 = \frac{0,214}{2,5} = 8,56\%$$

Tensione di cortocircuito percentuale

Si calcola la tensione di cortocircuito corrispondente al passaggio della corrente nominale trascurando la I_0 :

$$V_{cc} = |R_{cc} + jX_{cc}| \cdot I_{1n} = |64 + j185| \cdot 2,5 = 489 \text{ V}$$

$$V_{cc} \% = \frac{V_{cc}}{V_{1n}} 100 = \frac{489}{8000} 100 = 6,11\%$$

Se si trascura l'impedenza di statore, si può eseguire il seguente calcolo:

$$R_0 = \frac{V_{of}^2}{P_{of}} = 35,6 \Omega; \quad I_{0R} = \frac{V_{of}}{R_0} = 6,5 \text{ A}; \quad I_{0X} = \sqrt{I_{of}^2 - I_{0R}^2} = 5,72 \text{ A}; \quad X_0 = \frac{V_{of}}{I_{0X}} = 40,38 \Omega$$

1b) Rendimento (vedi commento sul Rendimento esercizio 2)

$$P_{Fe} = \frac{V_{1n}^2}{R_0} = \frac{8000^2}{267000} = 240 \text{ W}$$

$$P_{Cu(\alpha=1)} = R_{cc} \cdot I_{1n}^2 = 64 \cdot 2,5^2 = 400$$

$$\eta = \frac{P_{resa}}{P_{resa} + P_{Fe} + P_{Cu}} = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{cc}} = \frac{0,75 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,85}{0,75 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,85 + 240 + 0,75^2 \cdot 400} = \frac{12750}{12750 + 240 + 225} = 0,965$$

Esercizio n.3

Un trasformatore trifase in olio raffreddato ad aria ha i seguenti dati di targa:

$A_n=7500 \text{ kVA}$	Potenza nominale
$V_{1n}=15000 \text{ V}$	Tensione nominale lato 1
$V_{2n}=33000 \text{ V}$	Tensione nominale lato 2

Gli avvolgimenti sono collegati secondo lo schema dY (11)

I risultati delle prove a vuoto e in corto circuito sono riportati nella tabella seguente.

Prove a vuoto (misure lato bassa tensione)		
V_0 [V]	I_0 [A]	P_0 [W]
15000	1,33	7440
Prove in corto circuito (misure lato bassa tensione)		
V_{cc} [V]	I_{cc} [A]	P_{cc} [W]
1085	I_n	47870

1 Si determinino i parametri del circuito equivalente semplificato del trasformatore.

2. Si determini il rendimento del trasformatore a pieno carico e a metà carico, con fattore di potenza unitario e 0,8.

3. Si determini la regolazione di tensione per un funzionamento a pieno carico con fattore di potenza unitario e pari a 0,8.

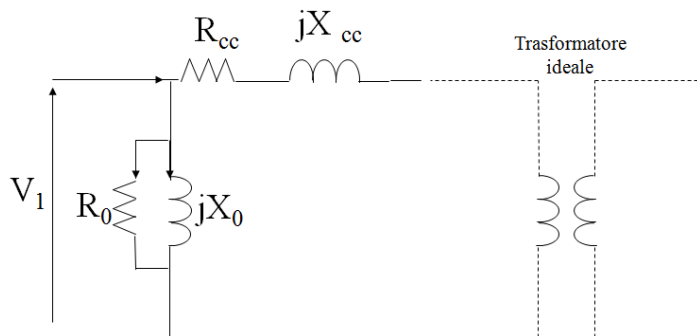
Soluzione

Si ricavano innanzitutto le correnti nominali relative rispettivamente al lato Alta Tensione (A.T.) e bassa tensione (b.t.), in base alla definizione di corrente nominale per trasformatori trifase:

$$I_{1n} = \frac{A_n}{\sqrt{3} \cdot V_{1n}} = \frac{7500 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 15000} = 288,7 A; \quad I_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{3} \cdot V_{2n}} = \frac{7500 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 33000} = 131,2 A$$

Punto 1. Si utilizza ora il circuito equivalente, che per un trasformatore trifase è definito **per fase**, ricordando che tutti i dati e le variabili forniti nel testo si devono intendere come grandezze complessive di linea o concatenate. Pertanto questi valori devono essere riportati ai rispettivi valore di fase, anche in base al tipo di collegamento previsto.

Si farà riferimento al circuito equivalente semplificato in cui i parametri del ramo magnetizzante si riportano immediatamente all'ingresso del circuito, mentre i parametri di corto circuito (impedenza interna del trasformatore), si raggruppano in serie sul solo lato 1 del trasformatore, riportando ad esso, con le opportune trasformazioni anche le impedenze sul lato 2.



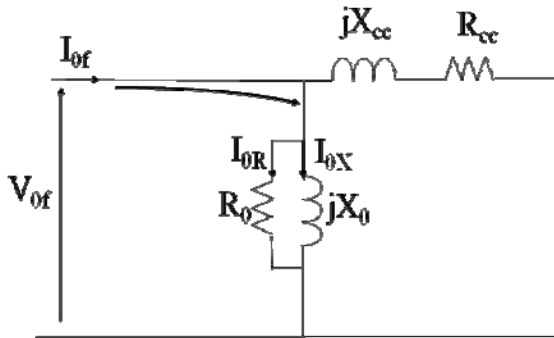
Calcolo dei parametri del ramo magnetizzante

Si considerino i dati della prova a vuoto, notando che questa è stata effettuata sul lato b.t. collegato a triangolo. Pertanto i valori per fase per la prova a vuoto risultano:

$$V_{of} = V_0 = 15000 \text{ V}$$

$$I_{of} = I_o / \sqrt{3} = 1,33 / \sqrt{3} = 0,75 \text{ A}$$

$$P_{of} = P_o / 3 = 7440 / 3 = 2480 \text{ W}$$



Possiamo ricavare la componente resistiva R_0 e quindi la corrispondente corrente resistiva nel ramo magnetizzante.

$$R_0 = \frac{V_{of}^2}{P_{of}} = 90,73 \text{ k}\Omega; \quad I_{0R} = \frac{V_{of}}{R_0} = 0,165 \text{ A}$$

La componente reattiva e la reattanza magnetizzante risultano:

$$I_{0X} = \sqrt{I_{of}^2 - I_{0R}^2} = \sqrt{0,75^2 - 0,165^2} = 0,73 \text{ A}; \quad X_0 = \frac{V_{of}}{I_{0X}} = \frac{15000}{0,73} = 20,5 \text{ k}\Omega$$

Calcolo dei parametri del ramo trasversale

Con le misure ricavate nella prova in corto circuito, si possono ricavare i corrispondenti parametri trasversali del circuito equivalente (che rappresentano l'impedenza interna serie del trasformatore). Anche in questo caso procediamo a riportare i dati misurati al loro valore di fase, osservando che anche questa prova è stata eseguita sul ramo bassa tensione:

$$V_{ccf} = V_{cc} = 1085 \text{ V}$$

$$I_{ccf} = I_{1n} / \sqrt{3} = 288,7 = 166,7 \text{ A}$$

$$P_{occ} = P_{cc} / 3 = 47870 / 3 = 15957 \text{ W}$$

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1nf}} = \frac{1085}{166,7} = 6,5 \Omega$$

$$R_{cc} = \frac{P_{ccf}}{I_{1nf}^2} = \frac{15957}{166,7^2} = 0,574 \Omega$$

$$X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = \sqrt{6,5^2 - 0,574^2} = 6,47 \Omega$$

Da questi dati si può inoltre calcolare la corrente di corto circuito percentuale, ripartita anche nelle sue componenti resistiva e reattiva (che saranno utili per il calcolo della **regolazione di tensione**):

$$v_{cc} \% = 100 \frac{V_{ccf}}{V_{1nf}} = \frac{1085}{15000} = 7,23 \%$$

$$v_{ccR} \% = 100 \frac{R_{cc} \cdot I_{1nf}}{V_{1nf}} = \frac{0,574 \cdot 166,7}{15000} = 0,64 \%$$

$$v_{ccX} \% = 100 \frac{X_{cc} \cdot I_{1nf}}{V_{1nf}} = \frac{6,47 \cdot 166,7}{15000} = 7,2 \%$$

Si sono così identificati i parametri del circuito equivalente semplificato di UNA FASE del trasformatore trifase.

Punto 2.

Calcolo del rendimento

Il rendimento di un trasformatore è definito come il rapporto fra la potenza attiva resa e la potenza attiva entrante.

$$\eta = \frac{P_{resa}}{P_{entrante}}$$

Poiché la potenza nominale del trasformatore è definita come potenza apparente ($A_n = V_n I_n$ per il trasformatore monofase e $A_n = 3 V_n I_n$ per il trifase (V_n e I_n sono valori efficaci di linea o concatenati rispettivamente della tensione e corrente nominale su uno dei due lati del trasformatore), per definire la **potenza attiva resa** si utilizza la formula:

$$P_{resa} = \alpha A_n \cos \varphi$$

α è il coefficiente di utilizzo o di carico del trasformatore rispetto alla sua potenza nominale, pari quindi a 1 per funzionamento nominale, o a pieno carico o a corrente nominale; 0,75 per funzionamento a $\frac{3}{4}$ del carico, 0,5 per funzionamento a metà carico e così via.

cos φ è il fattore di potenza e dipende dal tipo di carico, che deve essere quindi conosciuto, oppure ipotizzato, così come il coefficiente di utilizzo, perché il rendimento varia con entrambi.

La potenza entrante può essere definita in diversi modi, sempre riferiti al circuito equivalente elettrico, come potenza attiva entrante ai morsetti di ingresso.

Più spesso si definisce:

$$P_{entrante} = P_{resa} + P_{perdite}$$

Le perdite per il trasformatore si possono ricondurre a:

$$P_{perdite} = P_{Fe} + P_{Cu}$$

In questa espressione si indicano con P_{Fe} le cosiddette Perdite nel Ferro, ovvero le perdite complessivamente attribuite agli effetti della magnetizzazione (perdite per isteresi e correnti parassite) e rappresentate dal resistore R_0 . P_{Cu} a loro volta sono le perdite complessive nei conduttori, rappresentate dal resistore R_{cc} .

Perdite nel ferro e nel rame in condizioni nominali per il trasformatore trifase:

$$P_{Fe} = 3 \frac{V_{1f}^2}{R_0} = 3 \frac{15000^2}{90,73 \cdot 10^3} = 7440 W$$

$$P_{Cu} = 3 \cdot R_{cc} I_{1nf}^2 = 3 \cdot 0,574 \cdot \left(\frac{288,7}{\sqrt{3}} \right)^2 = 47870 W$$

(Per il trasformatore monofase l'espressione è analoga senza il coefficiente 3)

Osservazione. Si noti che le perdite così calcolate coincidono con i valori di potenza assorbita misurati nelle prove a vuoto e in corto circuito. D'altra parte ciò è naturale in quanto si erano utilizzate proprio quelle misure per calcolare i parametri R_0 e R_{cc} . In questa trattazione si è supposto che le misure siano state effettuate alle condizioni di temperatura del funzionamento effettivo della macchina. In realtà generalmente la temperatura nel corso delle prove è diversa, inferiore, rispetto a quella di funzionamento. In questo caso per un calcolo più preciso del rendimento i valori di resistenza utilizzati dovrebbero essere riportati alla

temperatura effettiva utilizzando il coefficiente $\gamma = \frac{234,5 + T_{effettiva}}{234,5 + T_{misura}}$. Questo comporta che le perdite effettive

risultano complessivamente superiori a quelle calcolate con i valori di misura e quindi il rendimento calcolato senza questa correzione risulta sovrastimato.

Infine, prima di definire una formula generale per il rendimento, si osserva che di norma le P_{Fe} sono indipendenti dalle condizioni di carico del trasformatore, in quanto legate alla tensione di alimentazione che è costante e pari alla tensione nominale (questo infatti assicura che il trasformatore lavori a condizioni di flusso nominale ottimale). Invece le P_{Cu} sono legate al coefficiente di utilizzo, che determina la corrente circolante e precisamente variano con α^2

In conclusione possiamo scrivere la seguente espressione generale del rendimento del trasformatore:

$$\eta = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{Cu}}$$

Per i diversi casi richiesti si ottiene quindi:

- a. Pieno carico, fattore di potenza unitario

$$\alpha = 1; \cos \varphi = 1$$

$$\eta = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{Cu}} = \frac{7500 \cdot 10^3}{7500 \cdot 10^3 + 7440 + 47870} = 0,9927$$

- b. Metà carico, fattore di potenza unitario

$$\alpha = 0,5; \cos \varphi = 1$$

$$\eta = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{Cu}} = \frac{0,5 \cdot 7500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 7500 \cdot 10^3 + 7440 + 0,5^2 \cdot 47870} = 0,9948$$

- c. Pieno carico, fattore di potenza 0,8

$$\alpha = 1; \cos \varphi = 0,8$$

$$\eta = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{Cu}} = \frac{7500 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{7500 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 7440 + 47870} = 0,9908$$

- d. Metà carico, fattore di potenza 0,8

$$\alpha = 0,5; \cos \varphi = 0,8$$

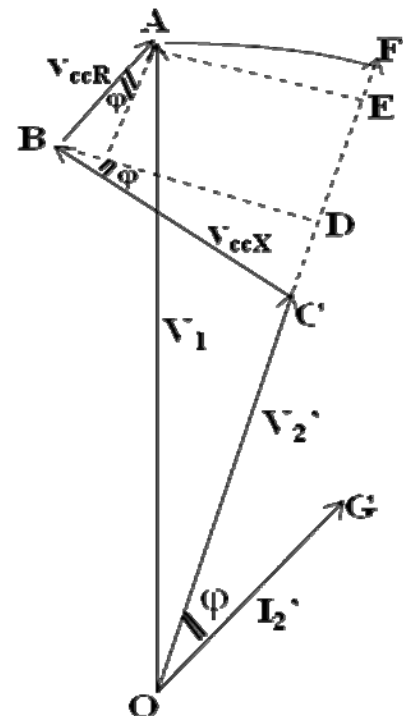
$$\eta = \frac{\alpha A_n \cos \varphi}{\alpha A_n \cos \varphi + P_{Fe} + \alpha^2 P_{Cu}} = \frac{0,5 \cdot 7500 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,5 \cdot 7500 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 7440 + 0,5^2 \cdot 47870} = 0,9935$$

Osservazione. Si noti che i valori del rendimento in questo caso sono sempre piuttosto elevati, come accade generalmente per i trasformatori di grande potenza. Pertanto è importante considerare diverse cifre decimali per apprezzare le differenze. Inoltre il rendimento a pieno carico non è generalmente il rendimento massimo, che si ottiene invece per un funzionamento a carico ridotto.

Punto 3.

Calcolo della Regolazione di tensione

La regolazione di tensione e è un indice della caduta di tensione sul carico alimentato dal trasformatore, rispetto alla tensione nominale ideale (e misurabile a vuoto). Essa è sostanzialmente dovuta all'impedenza interna del trasformatore, e in particolare alla impedenza di corto circuito riscontrabile nei trasformatori reali; viene espressa in termini percentuali e dipende dalle caratteristiche del carico (entità e fattore di potenza). Come si vedrà la regolazione di tensione può essere definita in funzione della tensione di cortocircuito e in particolare delle sue componenti resistiva e reattiva $v_{ccR}\%$ e $v_{ccX}\%$ (calcolate precedentemente).



Definizione della regolazione di tensione.

Nel seguito la definizione di regolazione di tensione è data con riferimento a un solo lato del trasformatore (lato 1), utilizzando quindi la tensione di alimentazione V_1 e la tensione sul carico riportata al lato 1: V_2' .

Il diagramma vettoriale riporta le principali grandezze elettriche nel piano complesso e tutti i calcoli devono essere intesi come operazioni vettoriali e non scalari. Inoltre si fa riferimento a funzionamento a pieno carico, quindi con corrente nominale. φ è lo sfasamento della corrente nel carico rispetto alla tensione in uscita dal trasformatore.

$$\begin{aligned} e &= 100 \frac{\overline{V_1} - \overline{V_2}'}{\overline{V_1}} = 100 \frac{\overline{OA} - \overline{OC}}{\overline{OA}} = 100 \frac{\overline{OF} - \overline{OC}}{\overline{OA}} = 100 \frac{\overline{CF}}{\overline{OA}} = \\ &= 100 \frac{\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}}{\overline{OA}} = 100 \left(\frac{\overline{BC} \cdot \text{sen}\varphi + \overline{AB} \cdot \text{cos}\varphi}{\overline{OA}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{OA}} \right) = \\ &= V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi + 100 \frac{\overline{EF}}{\overline{OA}} \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OE} + \overline{OF}} \Rightarrow EF = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{OE} + \overline{OF}} \cong \frac{\overline{AE}^2}{2\overline{OF}} = \frac{\overline{AE}^2}{2\overline{OA}}$$

da cui:

$$\frac{EF}{OA} = \frac{\overline{AE}^2}{2\overline{OA}^2} = \frac{(\overline{BC} \cdot \text{cos}\varphi + \overline{AB} \cdot \text{sen}\varphi)^2}{2\overline{OA}^2} = \frac{(v_{ccX\%} \cdot \text{cos}\varphi + v_{ccR\%} \cdot \text{sen}\varphi)^2}{2 \cdot 100 \cdot 100}$$

Infine:

$$e = V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi + \frac{(v_{ccX\%} \cdot \text{cos}\varphi + v_{ccR\%} \cdot \text{sen}\varphi)^2}{2 \cdot 100} \cong V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi$$

Utilizzando l'espressione ricavata e i valori delle tensioni di corto circuito resistive e reattive

a. Pieno carico, fattore di potenza unitario

$$\text{cos}\varphi = 1; \quad V_{ccR\%} = 0,64; \quad V_{ccX\%} = 7,2$$

$$e \cong V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi = 0,64\%$$

$$e = V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi + \frac{(v_{ccX\%} \cdot \text{cos}\varphi + v_{ccR\%} \cdot \text{sen}\varphi)^2}{2 \cdot 100} = (0,64 + 0,26) = 0,9\%$$

b. Pieno carico, fattore di potenza 0,8

$$\text{cos}\varphi = 0,8; \quad \text{sen}\varphi = 0,6 \quad V_{ccR\%} = 0,64; \quad V_{ccX\%} = 7,2$$

$$e \cong V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi = 4,83\%$$

$$e = V_{ccX\%} \cdot \text{sen}\varphi + V_{ccR\%} \cdot \text{cos}\varphi + \frac{(v_{ccX\%} \cdot \text{cos}\varphi + v_{ccR\%} \cdot \text{sen}\varphi)^2}{2 \cdot 100} = (4,83 + 0,19) = 5,02\%$$