

Biomeccanica & Simulazione di dispositivi biomedici
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Pavia, 2016

An introduction to the mechanics of deformable solids: Saint Venant / criteri di resistenza

Ferdinando Auricchio ^{1 2}

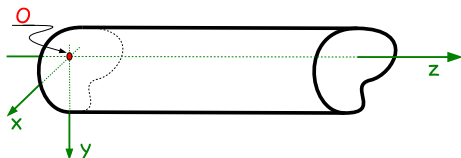
¹Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura, Università di Pavia, Italy

²IMATI – Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, CNR, Italy

June 14, 2016

Particolare problema elastico tridimensionale,
relativo ad un solido cilindrico caricato sulle sole basi

- **Ipotesi geometriche:** solido cilindrico



- Sezione retta; assi x-y principali di inerzia
- Asse z coincidente con l'asse della trave
- **Ipotesi sul materiale**
 - Elastico lineare isotropo omogeneo
- **Ipotesi sul carico**
 - Forze di volume nulle: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ in Ω
 - Forze di superficie nulle sul "mantello": $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ su ∂L
 - Forze di superficie non nulle sulle basi: $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ su A_1 e A_2

- **Problema lineare \Rightarrow vale il principio di sovrapposizione degli effetti**

- Tutte le equazioni sono lineari (equilibrio, congruenza, costitutive)
- Principio di sovrapposizione:

Problema 1 con soluzione 1

Problema 2 con soluzione 2

Problema (1+2) con soluzione (1+2)

Saint Venant I

- **Corpo non vincolato** \Rightarrow per l'equilibrio azioni esterne devono avere risultante e momento risultante nullo
- Presenti solo azioni sulle basi, per cui

$$\int_{A_1 \cup A_2} \mathbf{t} dA = \mathbf{0} \quad , \quad \int_{A_1 \cup A_2} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}] dA = \mathbf{0}$$

- Sulla base A_2 abbiamo:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

- Si fa l'ipotesi (da verificarne l'ammissibilità) che in tutto il solido le uniche componenti non nulle del tensore delle tensioni siano

$$\sigma_{zz} \quad , \quad \tau_{xz} \quad , \quad \tau_{yz}$$

da cui:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

(1)

Saint Venant: equazioni al contorno I

- Grazie all'ipotesi 1, le equazioni che governano il problema si semplificano

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{cases} \quad (2)$$
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

Saint Venant: condizioni al contorno I

- Sul mantello abbiamo:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Banalmente verificate la 1 e la 2 ricordando Eq. 1

- Sulla base A_2 abbiamo:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_3 \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

con singole componenti assegnate !!

- Sulla base A_1 abbiamo

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_{-3} \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

da calcolarsi con l'equilibrio globale della trave

Saint Venant: postulato del Saint Venant I

- **Ipotesi fondamentale.** A sufficiente distanza da ciascuna base (del cilindro retto), la soluzione del problema dell'equilibrio elastico dipende soltanto dalla risultante e dal momento risultante delle forze agenti sulle rispettive basi, e non dalla particolare distribuzione

$$\mathbf{R}_1 = \int_{A_1} \mathbf{t} dA \quad , \quad \mathbf{M}_1 = \int_{A_1} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}] dA$$

$$\mathbf{R}_2 = \int_{A_2} \mathbf{t} dA \quad , \quad \mathbf{M}_2 = \int_{A_2} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}] dA$$

- **Distanza di estinzione.** Distanza oltre la quale si verifica l'ipotesi fondamentale del Saint Venant
- **Caratteristiche di sollecitazione \mathbf{R} e \mathbf{M} .** Possiamo esprimere le azioni che agiscono sulle basi attraverso risultanti e momenti risultanti, le quali rappresenteranno opportune classi di equivalenza di azioni agenti sulle basi
 - sono le azioni della rimanente parte della struttura sulla parte in esame
 - ricordiamo che vale il principio di azione e reazione
 - ★ caratteristiche di sollecitazione sulle due basi
 - ★ caratteristiche di sollecitazione nella generica sezione retta del solido

- Le azioni agenti sulle basi, espresse attraverso le caratteristiche di sollecitazione **R** e **M**, sono rappresentate attraverso le componenti di tali forze e momenti risultanti, opportunamente in equilibrio tra loro
- Componenti delle caratteristiche di sollecitazione R e M** spesso indicate con terminologia particolare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_x = T_x & \text{sforzo di taglio lungo X} \\ R_y = T_y & \text{sforzo di taglio lungo Y} \\ R_z = N & \text{sforzo normale} \\ M_x & \text{momento flettente lungo X} \\ M_y & \text{momento flettente lungo Y} \\ M_z = M_t & \text{momento torcente} \end{array} \right.$$

- Relazione tra le caratteristiche di sollecitazioni e la distribuzione di forze superficiali sulla base A_2

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{A_2} \sigma_{zz} dA \\ T_x = \int_{A_2} \tau_{xz} dA \\ T_y = \int_{A_2} \tau_{yz} dA \\ M_x = \int_{A_2} y \sigma_{zz} dA \\ M_y = - \int_{A_2} x \sigma_{zz} dA \\ M_t = \int_{A_2} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dA \end{array} \right. \quad (3)$$

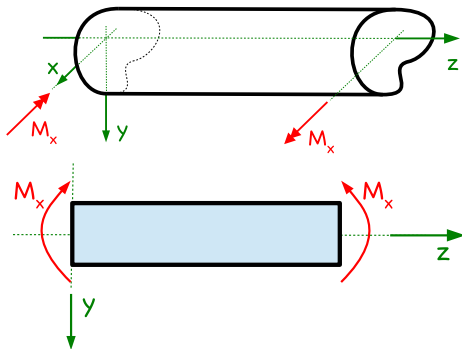
- Valendo il principio di sovrapposizione degli effetti posso ricondurre lo studio della generica trave allo studio di 6 **sollecitazioni elementari**

{	1]	N	sforzamento normale centrato
	2.a]	T_x	taglio e momento flettente
	2.b]	T_y	taglio momento flettente
	3.a]	M_x	flessione retta
	3.b]	M_y	flessione retta
	4]	M_t	torsione

Flessione retta I

Flessione retta: solido del Saint Venant con condizioni di carico in termini di risultanti dato da

$$M_x \neq 0 \quad , \quad N = T_x = T_y = M_y = M_t = 0 \quad (4)$$



- Per l'equilibrio il momento risultante sarà costante lungo l'asse della trave
- Ogni tronco di trave (concio) si “deforma” nella stessa misura

Costruzione della soluzione

- Ipotesi sul campo tensionale:

$$\sigma_{zz} = ax + by + c$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

- Costanti a, b, c calcolate soddisfacendo condizioni $N = M_y = 0, M_x \neq 0$ attraverso le definizioni 3

$$a = 0 \quad , \quad b = \frac{M_x}{I_x} \quad , \quad c = 0$$

- I_x è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse x

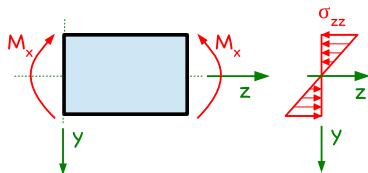
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

- **Esercizio.** Data una sezione rettangolare di lati a e b si calcoli la posizione del baricentro, i momenti di inerzia rispetto a due assi baricentrici e paralleli ai lati, e si dimostri che tali assi sono principali di inerzia.

- **Soluzione in termini di stato tensionale:**

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$



- **Asse neutro:** luogo dei punti in cui la tensione è nulla

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{asse } x$$

- **Piano di sollecitazione:** piano ortogonale al momento flettente

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \perp \text{Piano } yz \quad \Rightarrow \quad yz \text{ piano di sollecitazione}$$

- **Asse di sollecitazione:** traccia del piano di sollecitazione sul piano della sezione retta

$$\text{asse } y \quad \Rightarrow \quad \text{asse di sollecitazione}$$

Flessione retta I

- Dallo stato tensionale σ attraverso le equazioni costitutive passiamo allo stato deformativo ϵ

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

- In termini della caratteristica di sollecitazione momento flettente

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \\ \epsilon_{yy} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \\ \epsilon_{zz} = \frac{M_x}{EI_x} y \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

- Le fibre longitudinali all'asse della trave si incurvano, evidenziando allungamenti nelle fibre inferiori e accorciamenti in quelle superiori

- Dallo stato deformativo $\boldsymbol{\varepsilon}$ attraverso le equazioni di congruenza passiamo al campo di spostamenti \mathbf{u} (derivato)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x} y \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

- Integrando posso calcolare il campo di spostamento a meno di un moto rigido

- Trascurando il contributo di moto rigido il campo di spostamenti risulta essere:

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} xy \\ v = -\frac{M_x}{2EI_x} \left[z^2 + \nu (y^2 - x^2) \right] \\ w = \frac{M_x}{EI_x} yz \end{cases}$$

- **Esercizio.** Si dimostri che la soluzione trovata per il problema di flessione retta (in termini di tensioni, deformazioni, spostamenti) soddisfa tutte le equazioni del problema. Si concluda che la soluzione trovata è anche la soluzione del problema in esame.
- **Esercizio.** Nel caso di una trave a sezione rettangolare si disegni la configurazione acquisita dalla generica sezione trasversale della trave ($z = \text{costante}$). **Si verifichi che sezioni piane rimangono piane durante la deformazione.**

Flessione retta: da Saint Venant alla teoria tecnica di trave I

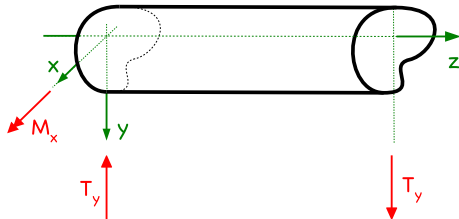
- Nota la soluzione di flessione retta di trave nell'ambito della teoria del Saint Venant, è facile costruire quella che nota come **teoria tecnica di trave**
- Limitiamoci per semplicità al caso delle travi piane: $x = 0$
- Trascurando i termini di ordine superiore (ipotizzando la trave snella)

$$\begin{cases} v = -\frac{M_x}{2EI_x} z^2 \\ w = \frac{M_x}{EI_x} yz \end{cases}$$

Taglio e flessione retta I

Taglio e flessione retta: solido del Saint Venant con condizioni di carico in termini di risultanti dato da

$$T_y \neq 0 \quad , \quad M_x \neq 0 \quad , \quad N = T_x = M_y = M_t = 0 \quad (5)$$



- Problema molto più complesso

- **Domanda.** Dato un corpo sottoposti ad opportuni carichi, il materiale è in grado di resistere alla sollecitazione prodotta ??
- Assegnato un corpo deformabile (o un sistemi di corpi deformabili) ed un sistema di condizioni al contorno (sollecitazioni esterne e spostamenti imposti), dobbiamo fare un'analisi strutturale volta all'individuazione della soluzione del problema dell'equilibrio elastico
- Nota la soluzione del problema dell'equilibrio elastico, in ogni punto del corpo (o del sistema di corpi) conosciamo

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$$

Criteri di resistenza II

- Si ricordi la risposta di un generico materiale durante una prova monoassiale di trazione [caratterizzazione della risposta del materiale]
- Se il punto materiale è soggetto ad uno stato tensionale monoassiale, allora la verifica è immediata \Rightarrow avendo fatto un'analisi nell'ipotesi di materiale elastico lineare dobbiamo garantire che:

$$\sigma \leq \sigma_P$$

- Verifica accettabile se tutte le grandezze in gioco fossero note in modo certo, ovvero senza oscillazioni statistiche
- Tutte le quantità sono soggette ad oscillazioni statistiche (dimensioni del corpo, proprietà misurate in laboratorio, forze agenti, etc.)
- **Tensione ammissibile.** Tensione ammissibile per consentire condizioni di sicurezza è allora una frazione della resistenza nominale attraverso un **coefficiente di sicurezza** s :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_P}{s}$$

- Per un problema “reale” la risposta meccanica è in termini tensoriali generali

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Per problemi particolari, come nel caso del Saint Venant, la soluzione è in termini tensoriali speciali, ma in generale non presente uno stato mono-componente

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- ★ Da un lato abbiamo una risposta del solido in termini tensoriali, dall'altro abbiamo una caratterizzazione del comportamento materiale in termini scalari
- Come rapportare e confrontare un tensore con uno scalare ???

- **Criteri di resistenza:** funzioni che danno una misura scalare del tensore delle tensioni, ovvero che permettono di ottenere uno “sforzo uniassiale equivalente”

$$\sigma_{eq}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \leq \sigma_P$$

- Nel caso di isotropia del materiale

$$\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_P$$

- **Criterio di Tresca** o **Criterio della massima tensione tangenziale**: la crisi si ha quando la tensione tangenziale massima τ_{max} raggiunge un valore limite τ_P
- Per un generico stato tensionale:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

- Riferendoci ad una prova monoassiale:

$$\tau_P = \frac{1}{2} \sigma_P$$

- In definitiva il criterio risulta essere:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \leq \sigma_P$$

- **Criterio di Von Mises** o **Criterio della massima energia di distorsione**: la crisi si ha quando l'energia di deformazione relativa al componente deviatorica (a volume costante) raggiunge un valore limite.
- Per un generico stato tensionale:

$$E_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]$$

- Riferendoci ad una prova monoassiale:

$$E_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_P^2$$

- In definitiva il criterio risulta essere:

$$\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \leq \sigma_P^2$$

$$\left[(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3(\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2) \right] \leq \sigma_P^2$$

- Il criterio di von Mises può anche essere espresso in modo molto efficace in termini del **secondo invariante della parte deviatorica \mathbf{s}** del tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$
- La parte deviatorica del tensore delle tensioni è definita come

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad \text{con} \quad \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \sigma_{ii}$$

- Il secondo invariante di \mathbf{s} può anche essere definito come

$$J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad , \quad J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

- Per uno stato tensionale di trazione

$$\boldsymbol{\sigma}^{traction} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}^{traction} = \sigma \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

- Per uno stato tensionale di trazione

$$J_2^{traction} = \frac{1}{2} \frac{6}{9} \sigma^2 = \frac{1}{3} \sigma^2 \quad (6)$$

- Criterio di von Mises

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) \leq J_2^{traction} \Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \leq \frac{1}{3} \sigma^2$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} : \mathbf{s} \leq \sigma_P$$

- **Esercizio.** Si dimostri nel dettaglio equazione 6.