

An introduction to the mechanics of deformable solids: constitutive relations

Ferdinando Auricchio ¹ ²

¹Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura, Università di Pavia, Italy

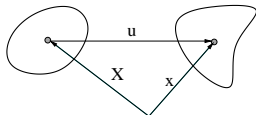
²IMATI – Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, CNR, Italy

May 15, 2015

Analisi della deformazione I

- **Spostamento \mathbf{u} :** campo vettoriale che associa ad ogni punto del corpo in posizione iniziale la posizione dello stesso punto in posizione finale

$$\mathbf{x}(P) = \mathbf{X}(P) + \mathbf{u}(P)$$



- **Deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$:** campo tensoriale che misura lo stato di deformazione del corpo nel campo di configurazione

- Equazioni di campo

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \quad \text{in} \quad \Omega$$

- Condizioni al contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega_u \subseteq \partial\Omega$$

- ★ Numero delle incognite:

Spostamenti	→	vettore	→	3
Deformazione	→	tensore 2 ordine simm.	→	6

★ **6 equazioni in 9 incognite**

Analisi della deformazione I

Notazione ingegneristica

- Assumiamo un sistema di riferimento (O, X, Y, Z)

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

- Equazioni di campo

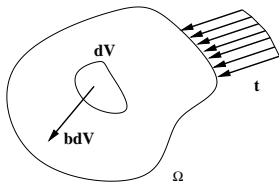
$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{in} \quad \Omega$$

+ condizioni al contorno

Analisi della tensione I

• Tipologie di forze

- Forze distribuite superficiali \mathbf{t} $[F L^{-2}]$
- Forze distribuite volumetriche \mathbf{b} $[F L^{-3}]$



- **Forze interne:** azioni che parti diverse del corpo si scambiano

vettore delle tensioni $\rightarrow \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$

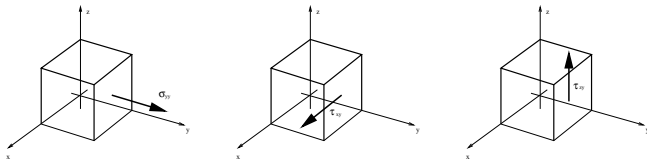
tensore delle tensioni $\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^3 (\mathbf{t}_{e_i} \otimes \mathbf{e}_i) \right]$

- ★ Il vettore \mathbf{t}_n rappresenta la forza per unità di superficie trasmessa tra due parti di corpo nel punto P attraverso una superficie ideale passante per P e di normale \mathbf{n}

Analisi della tensione I

- ★ Componente ij di σ rappresenta l' i -esima componente del vettore tensione agente sulla faccia di normale positiva uscente j -esima
- **Notazione ingegneristica:**

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$



Corpo deformabile: equilibrio I

• Equazioni indefinite di equilibrio

- Equazioni di campo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{in} && \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T && \text{in} && \Omega \end{aligned}$$

- Condizioni al contorno

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{su} \quad \partial\Omega_f \subseteq \partial\Omega$$

• Notazione ingegneristica

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{in} \quad \Omega$$

★ Numero incognite:

3 equazioni in 6 incognite !!

Legame costitutivo I

- **Analisi della deformazione**

6 equazioni in 9 incognite

- **Analisi della tensione**

3 equazioni in 6 incognite

- **Legame costitutivo**

6 equazioni

In generale:

$$\sigma \leftrightarrow \epsilon$$

- E' possibile introdurre diverse relazioni matematiche tra σ e ϵ
- Il legame costitutivo è l'ingrediente che tiene conto della
 - ★ natura fisica dell'oggetto in esame
 - ★ modalità di risposta fisica del corpo in esame a stati di deformazione e sollecitazione

Prove sperimentali



modelli

Elasticità alla Cauchy I

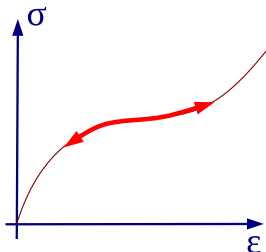
- **Elasticità alla Cauchy (nonlineare)**: modello più semplice possibile di legame costitutivo

$$\sigma = \sigma(\epsilon)$$

or

$$\epsilon = \epsilon(\sigma)$$

- Esiste una dipendenza funzionale tra σ e ϵ
- In generale, legame tra σ e ϵ può essere nonlineare
- Unica curva descritta durante la fase di carico e scarico



- Non diciamo nulla sul lavoro svolto (in particolare durante un ciclo !!)

Elasticità alla Cauchy: caso lineare I

- **Elasticità alla Cauchy lineare:** caso semplificato con dipendenza lineare

$$\sigma = \mathbb{C}\epsilon \quad \text{or} \quad \epsilon = \mathbb{S}\sigma$$

- \mathbb{C} e \mathbb{S} sono tensori del IV ordine e prendono il nome di **tensore elastico** e **tensore elastico inverso** dato che $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$

- **Notazione indiciale**

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad \text{or} \quad \epsilon_{ij} = \mathbb{S}_{ijkl}\sigma_{kl}$$

- \mathbb{C}_{ijkl} e \mathbb{S}_{ijkl} sono la rappresentazione indiciale di \mathbb{C} e \mathbb{S} e sono dotati di 4 indici
- In generale, i tensori del IV ordine sono dotati di 81 costanti; nel caso particolare, dovendo relazionare quantità simmetriche (ovvero σ e ϵ), \mathbb{C} e \mathbb{S} sono dotati solo di 36 costanti (**simmetria minore**)

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^t \quad , \quad \mathbb{S} = \mathbb{S}^t$$

ovvero

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk} \quad , \quad \mathbb{S}_{ijkl} = \mathbb{S}_{jikl} = \mathbb{S}_{ijlk}$$

• Notazione ingegneristica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxyx} & C_{xxyy} & C_{xxzx} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyyz} & C_{yyzx} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzyz} & C_{zzzx} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xyyz} & C_{xyzx} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzyz} & C_{yzzx} \\ C_{zxxx} & C_{zxyy} & C_{zxzz} & C_{zxxxy} & C_{zxyyz} & C_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xxxx} & S_{xxyy} & S_{xxzz} & S_{xxyx} & S_{xxyy} & S_{xxzx} \\ S_{yyxx} & S_{yyyy} & S_{yyzz} & S_{yyxy} & S_{yyyz} & S_{yyzx} \\ S_{zzxx} & S_{zzyy} & S_{zzzz} & S_{zzxy} & S_{zzyz} & S_{zzzx} \\ S_{xyxx} & S_{xyyy} & S_{xyzz} & S_{xyxy} & S_{xyyz} & S_{xyzx} \\ S_{yzxx} & S_{yzyy} & S_{yzzz} & S_{yzxy} & S_{yzyz} & S_{yzzx} \\ S_{zxxx} & S_{zxyy} & S_{zxzz} & S_{zxxxy} & S_{zxyyz} & S_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

- $[C]$ e $[S]$ sono matrici quadrate 6×6 , non necessariamente simmetriche (tensori del IV ordine con simmetria minore)

- **Elasticità alla Green (non-lineare)**: esistenza di un potenziale $\psi(\boldsymbol{\epsilon})$ o di un potenziale complementare $\psi^*(\boldsymbol{\sigma})$ tale per cui:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}$$

,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

- Equivale a garantire che in un ciclo a controllo di deformazioni il lavoro totale compiuto è nullo !!

ψ : potenziale elastico

ψ^* : potenziale elastico complementare

Elasticità alla Green: caso lineare I

- **Elasticità alla Green lineare**: caso semplificato con dipendenza lineare

$$\sigma = \mathbb{C}\epsilon \quad \text{or} \quad \epsilon = \mathbb{S}\sigma$$

con

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon^2} \quad , \quad \mathbb{S} = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \sigma^2}$$

- I tensori elastici sono dotati della **simmetria maggiore**

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \quad , \quad \mathbb{S} = \mathbb{S}^T$$

ovvero

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \quad , \quad \mathbb{S}_{ijkl} = \mathbb{S}_{klij}$$

- Rappresentazione ingegneristica attraverso una matrice 6×6 simmetrica
- Risposta costitutiva richiede la determinazione di **21 costanti**. Determinare un numero adeguato di prove sperimentali in grado di permettere di calcolare le 21 costanti (non banale!)

Materiale isotropo / Corpo omogeneo I

- **Materiale isotropo**: materiale la cui risposta meccanica non dipende dalla direzione (non è dotato di direzioni preferenziali)
- Si dimostra che la risposta di un materiale elastico (Green) lineare isotropo dipende solo 2 costanti materiali
- **Corpo omogeneo**: corpo costituito dallo stesso materiale in tutti i punti

- **Materiale elastico lineare isotropo**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma}$$

ovvero in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

- Comportamento definito tramite due sole costanti

E : modulo elastico o di Young

ν : modulo di Poisson

- Sono necessarie due misure per la caratterizzazione della risposta del materiale
- Prove standard
 - ★ Prove di trazione
 - ★ Prove di torsione

- **Prova di trazione:** possiamo risolvere il corrispondente problema al contorno ?

$$\boldsymbol{\sigma} = ?? \quad , \quad \boldsymbol{\epsilon} = ?? \quad , \quad \mathbf{u} = ??$$

- **Equazioni differenziali governanti il problema**

(materiale elastico lineare & $\mathbf{b} = \mathbf{0}$)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \end{cases}$$

- Per le ipotesi introdotte (piccoli spostamenti e materiale elastico lineare) vale il teorema di Kirchhoff \Rightarrow **la soluzione esiste ed è unica**
- Dobbiamo cercare di costruire una soluzione
- Se troviamo dei campi $\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ che soddisfano le equazioni differenziali (e le condizioni al contorno), allora essi rappresentano l'unica soluzione !

Provino soggetto a trazione



- Mi concentro nella zona centrale del provino
- Cerchiamo la soluzione \Rightarrow proviamo a ricostruirla partendo dall'equilibrio (semplice)

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} = \text{dato del problema} = \text{costante}$$

$$\sigma_{xx} \neq 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

- Equazioni di equilibrio sono soddisfatte !!

Prova di trazione II

- Deformazioni ?? Spostamenti ??

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = 0 \end{cases}$$

Trazione semplice (BVP) I

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{F}{A} = \text{costante} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \quad (3)$$

Trazione semplice (BVP) I

- Combinando Equazioni 2 e 3, trovo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

- Dalle prime 3 equazioni di 4 ricavo:

$$\begin{cases} u = \frac{\sigma_{xx}}{E}x + u_0(y, z) \\ v = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}y + v_0(x, z) \\ w = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}z + w_0(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

- Dalle ultime 3 equazioni di 4 ricavo che il campo $\mathbf{u}_0 = \{u_0, v_0, w_0\}^T$ è un campo di spostamenti rigidi, ovvero:

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \nabla^s \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (6)$$

Trazione semplice (BVP) III

- Trascurando il campo di spostamenti rigidi (non interessante in quanto funzione delle condizioni al contorno sugli spostamenti), la **soluzione del problema di trazione semplice** è :

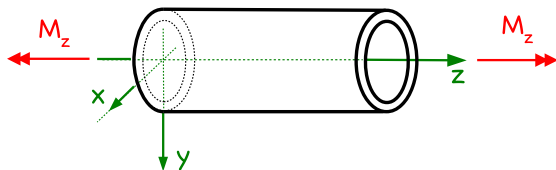
$$\begin{array}{l} \text{Tensioni:} \\ \text{Deformazioni:} \\ \text{Spostamenti:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{F}{A} = \text{costante} \\ \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \\ u = \frac{\sigma_{xx}}{E} x \\ v = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} y \\ w = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} z \end{array} \right.$$

- **Esercizio.** Verificare che i campi \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ trovati dallo studio del problema di trazione semplice soddisfano effettivamente le equazioni differenziali del problema dell'equilibrio elastico (e quindi per il Teorema di Kirchhoff costituiscono LA soluzione).

Materiale isotropo elastico lineare I

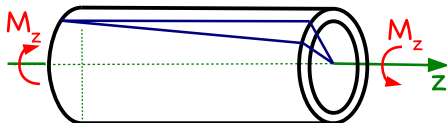
- **Modulo di Poisson:** parametro materiale che dà una misura della contrazione laterale durante una prova di trazione
- Come è possibile misurare il modulo di Poisson ??

★ Prova di torsione



Materiale isotropo elastico lineare II

- ★ **Ipotesi 1:** sezione rette ruotano mantenendosi piane
- ★ **Ipotesi 2:** fibre longitudinali si mantengono rettilinee e non variano di lunghezza
- Per ogni valore della coppia applicata è possibile misurare lo spostamento dei punti sulla superficie esterna (che per la piccolezza dello spessore possiamo identificare anche con la superficie media)



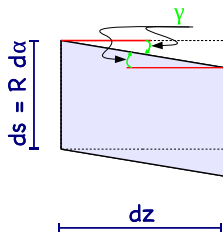
- Il regime deformativo è quindi governato dalla rotazione $\theta(z)$ della generica sezione di ascissa z , funzione lineare della distanza dalla sezione $z = 0$
- La rotazione della generica sezione può essere espressa in funzione della rotazione Θ dell'estremo libero, con $\Theta = \theta(z = L)$ dove L è la lunghezza della trave

$$\theta(z) = \frac{z}{L}\Theta$$

Materiale isotropo elastico lineare III

- Considerazioni geometriche mostrano che

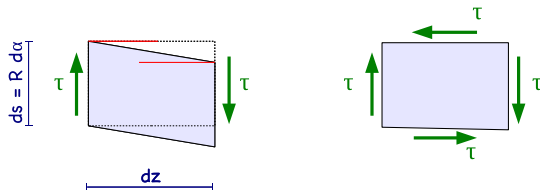
$$\gamma = \frac{R\Theta}{L}$$



- Il parametro γ è noto con il nome di **scorrimento angolare** e misura la variazione di angolo tra due fibre originariamente ortogonali

Materiale isotropo elastico lineare IV

- Si può immaginare che esiste uno **sforzo tangenziale**, che per equilibrio deve essere nella seguente forma



- Si dimostra che

$$\tau = G\gamma$$

dove G è noto come modulo di elasticità tangenziale

- Si dimostra che

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Vedi per esempio Nordin (semplici modelli)