Biomeccanica & Simulazione di dispositivi biomedici
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Pavia, 2017

An introduction to the mechanics of deformable solids: change of configuration, equilibrium

Ferdinando Auricchio [1] [2]

[1] Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura, Università di Pavia, Italy
[2] IMATI – Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, CNR, Italy

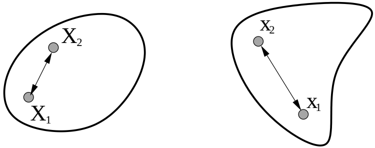
May 5, 2017

Outline I

- **Corpo deformabile**
- **Cinematica** (Analisi della deformazione)
  - Piccoli spostamenti
  - Tensore della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$
  - Significato fisico componenti $\boldsymbol{\varepsilon}$
- **Equilibrio statico** (Analisi della tensione)
  - Assiomi di equilibrio (Statica)
  - Vettore delle tensioni
  - Tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$
  - Significato fisico componenti $\boldsymbol{\sigma}$
  - Equazioni indefinite di equilibrio
- **Equilibrio dinamico**
  - Cenni al problema

Corpo deformabile I

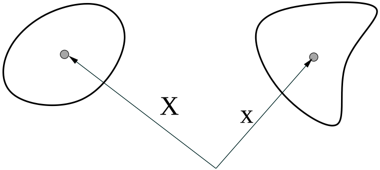
- **Oggetto in studio:**
  - corpo materiale identificato con una regione $\Omega \subset \mathcal{R}^3$
  - **Corpo deformabile:** distanza tra punti variabile



- **Esempi:**
  - Pneumatico
  - Fluido in un canale
  - Disco intervertebrale
  - Arteria
  - Sangue

Corpo deformabile I

- **Cinematica:**
  - **Corpo 2D:** 2 gdl per punto



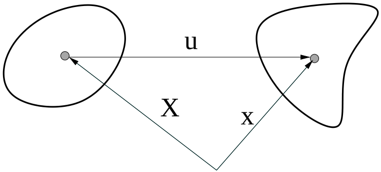
    - ⋆ **X**: vettore posizione iniziale
    - ⋆ **x**: vettore posizione corrente

  - **Corpo 3D:** 3 gdl per punto
  - Cinematica complessa ⇒ Analisi della deformazione

Analisi della deformazione I

- **Spostamento u**: campo di maggior interesse

$$\boxed{\mathbf{x}(P) = \mathbf{X}(P) + \mathbf{u}(P)} \qquad (1)$$



- **Spostamento u:** campo vettoriale che associa ad ogni punto (materiale) del corpo in posizione iniziale la posizione dello stesso punto in posizione finale
- Il campo di spostamenti è assunto sufficientemente regolare (in modo da escludere fratture e compenetrazioni di materiale)

☐ **Esercizio.** Assumendo un sistema di riferimento $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, [ovvero un sistema di riferimento (O, X, Y, Z)], si esprimano i vettori **x**, **X** e **u**, nonchè la relazione 1 in notazione compatta, indiciale, ingegneristica.

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \Rightarrow \mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\} \quad , \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$(O, X, Y, Z) \Rightarrow \mathbf{u} = \{u, v, w\} \quad , \quad \mathbf{X} = \{X, Y, Z\}$$

Analisi della deformazione I

- Limitando l'attenzione ad un intorno (piccolo) di un punto, possiamo fermare lo sviluppo in serie del campo di spostamenti ai termini del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(P) &= \mathbf{u}(P_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right) d\mathbf{X} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}\, d\mathbf{X}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

☐ **Esercizio.** Assumendo un sistema di riferimento $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, [ovvero un sistema di riferimento (O, X, Y, Z)], si esprimano i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{u}$, nonchè la relazione 2 in notazione compatta, indiciale, ingegneristica

$$
u_i(P) = u_i(P_0) + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j \quad , \quad
\begin{cases}
u = u_0 + \dfrac{\partial u}{\partial X}\, dX + \dfrac{\partial u}{\partial Y}\, dY + \dfrac{\partial u}{\partial Z}\, dZ \\
v = v_0 + \dfrac{\partial v}{\partial X}\, dX + \dfrac{\partial v}{\partial Y}\, dY + \dfrac{\partial v}{\partial Z}\, dZ \\
w = w_0 + \dfrac{\partial w}{\partial X}\, dX + \dfrac{\partial w}{\partial Y}\, dY + \dfrac{\partial w}{\partial Z}\, dZ
\end{cases}
$$

Analisi della deformazione I

- Introduciamo il **gradiente degli spostamenti** $\mathbf{H}$:

$$\boxed{\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}}$$

  - $\mathbf{H}$ è un tensore del secondo ordine, in quanto trasforma vettori in vettori (identificabile con una matrice 3×3)
  - $\mathbf{H}$ è un campo tensoriale, ovvero è una quantità che dipende dal punto del corpo nel quale è valutato

- Lo sviluppo in serie del campo di spostamento in un intorno elementare

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} d\mathbf{X} \qquad \text{da cui} \qquad \boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{W} d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X}} \tag{3}$$

dove:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\right) = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T\right]$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\right) = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right]$$

  - $\mathbf{W}$: tensore emisimmetrico del 2^o ordine $\qquad (\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T)$
  - $\boldsymbol{\varepsilon}$: tensore simmetrico del 2^o ordine $\qquad (\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T)$

Analisi della deformazione II

- **Ipotesi di piccoli spostamenti:**

$$\boxed{\left\| \frac{\mathbf{u}}{L} \right\| << 1}$$

con L una dimensione caratteristica e significativa del corpo deformabile

- Grazie all'ipotesi di piccoli spostamenti possiamo dare un significato fisico ai termini

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{W} d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X}}$$

✓ In 3 primo addendo $(\mathbf{u}_0 + \mathbf{W} d\mathbf{X})$ rappresenta un contributo di moto rigido

✓ In 3 secondo addendo $(\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X})$ rappresenta un contributo puramente deformativo

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \textbf{tensore della deformazione}}$$

★ Concentriamoci per ora solo sul contributo deformativo !!

$\boldsymbol{\varepsilon}$: notazione indiciale I

- Assumiamo un sistema di riferimento $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ per cui indichiamo:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T \qquad \mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$$

- Il tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$ può essere rappresentato come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) \\ \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \end{cases} \tag{4}$$

□ **Esercizio.** Partendo dalla definizione $\boldsymbol{\varepsilon} = [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]/2$, verificare le relazioni 4 sulle componenti di deformazione ed in particolare la relazione indiciale: $\varepsilon_{ij} = [u_{i,j} + u_{j,i}]/2$ dove la virgola indica derivazione.

$\boldsymbol{\varepsilon}$: notazione ingegneristica I

- Assumiamo un sistema di riferimento (O, X, Y, Z) per cui indichiamo:

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T \qquad \mathbf{X} = \{x, y, z\}^T$$

- Il tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$ può essere rappresentato come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{5}$$

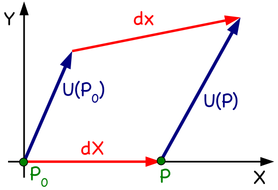
☐ **Esercizio.** Partendo dalla definizione $\boldsymbol{\varepsilon} = [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]/2$, verificare le relazioni 5 sulle componenti di deformazione.

Significato fisico componente ε_{xx} I

- Introduciamo un sistema di riferimento (O, x, y, z)
- Consideriamo un vettore di lunghezza infinitesima $d\mathbf{X}$ posto lungo l'asse x, quindi in componenti:

$$d\mathbf{X} = \{dX, 0, 0\}^T$$

- Indichiamo con $d\mathbf{x}$ l'elemento trasformato durante il cambio di configurazione (deformazione del corpo)



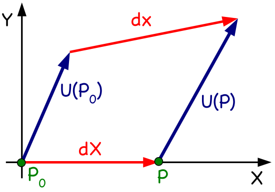
- Indichiamo con $\varepsilon_{\mathbf{X}}$ l'allungamento relativo subito dal vettore $d\mathbf{X}$, definito come:

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \frac{\|d\mathbf{x}\| - \|d\mathbf{X}\|}{\|d\mathbf{X}\|}$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma del vettore, per cui

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}^T \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Significato fisico componente ε_{xx} II



- Calcoliamo le componenti del vettore $d\mathbf{x}$ (considerando solo il contributo puramente deformativo e trascurando la componente rigida del campo di spostamenti)

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= [d\mathbf{X} + \mathbf{u}(P)] - \mathbf{u}(P_0) \\
&= d\mathbf{X} + [\mathbf{u}(P_0) + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X}] - \mathbf{u}(P_0) \\
&= d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} dX \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} dX \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} (1 + \varepsilon_{xx})\, dX \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, dX \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}\, dX \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Significato fisico componente ε_{xx} III

- Calcoliamo le norme dei vettori $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{X}$:

$$\|d\mathbf{x}\| = \left[(1+\varepsilon_{xx})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dX$$

$$\|d\mathbf{X}\| = dX$$

- L'allungamento relativo quindi risulta:

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \frac{\|d\mathbf{x}\| - \|d\mathbf{X}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \left[(1+\varepsilon_{xx})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

- Trascurando i termini di ordine superiore:

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} \approx [1+2\varepsilon_{xx}]^{\frac{1}{2}} - 1 \approx [1+\varepsilon_{xx}] - 1 = \varepsilon_{xx}$$

Significato fisico componente ε_{xx} IV

- Quindi otteniamo:

$$\boxed{\varepsilon_{\mathbf{x}} = \varepsilon_{xx}}$$

★ In conclusione:

> La componente ε_{xx} del tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta l'allungamento di una fibra di materiale parallela all'asse x

- Analoghe considerazioni valgono per ε_{yy} e ε_{zz}

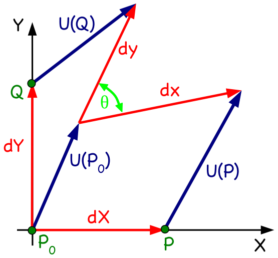
☐ **Esercizio.** Dimostrare nel dettaglio che $\varepsilon_{\mathbf{x}} = \varepsilon_{xx}$ [si usi lo sviluppo in serie della funzione $f(x) = x^{1/2}$]

Significato fisico componente γ_{xy} I

- Introduciamo un sistema di riferimento (O, X, Y, Z)
- Consideriamo due vettori di lunghezza infinitesima $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{Y}$ posti lungo gli assi X e Y, quindi in componenti:

$$\mathbf{X} = \{dX, 0, 0\}^T \qquad \mathbf{Y} = \{0, dY, 0\}^T$$

- Indichiamo con $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$ gli elementi trasformati durante il cambio di configurazione (deformazione del corpo)



- Indichiamo con $\theta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})$ l'angolo compreso tra $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$ e con $\cos[\theta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})]$ il coseno di tale angolo

Significato fisico componente γ_{xy} II

- Ricordiamo il prodotto scalare $\cdot$ tra due generici vettori **a** e **b**

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}^T \qquad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}^T$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x a_y + a_y b_y + a_z b_z$$

- Ricordando quanto trovato nella diapo 12 (i.e. $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X}$), calcoliamo i vettori $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$ e le loro componenti

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} (1 + \varepsilon_{xx})\, dX \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, dX \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}\, dX \end{array} \right\}$$

$$d\mathbf{y} = d\mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{Y} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, dY \\ (1 + \varepsilon_{yy})\, dY \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz}\, dY \end{array} \right\}$$

Significato fisico componente γ_{xy} III

- Trascurando i termini di ordine superiore:

$$\cos[\theta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})] = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{\|d\mathbf{x}\|\|d\mathbf{y}\|} \approx \gamma_{xy} \tag{6}$$

- Indichiamo con $\gamma_{\mathbf{XY}}$ la variazione di angolo tra $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, ovvero:

$$\gamma_{\mathbf{XY}} = \frac{\pi}{2} - \theta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})$$

- Ricordiamo l'ipotesi di piccoli spostamenti, per cui abbiamo:

$$\cos[\theta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{\mathbf{XY}}\right) = \sin(\gamma_{\mathbf{XY}}) \approx \gamma_{\mathbf{XY}}$$

- Quindi otteniamo:

$$\boxed{\gamma_{\mathbf{XY}} = \gamma_{xy}}$$

Significato fisico componente γ_{xy} IV

★ In conclusione:

> La componente γ_{xy} del tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta la variazione di angolo tra una fibra di materiale parallela all'asse x ed una fibra di materiale parallela all'asse y

- Analoghe considerazioni valgono per γ_{yz} e γ_{xz}

☐ **Esercizio.** Dimostrare nel dettaglio relazione 6

☐ **Esercizio.** Dimostrare nel dettaglio che $\gamma = \gamma_{xy}$

Direzioni principali di $\boldsymbol{\varepsilon}$ I

- Dato lo stato deformativo in un punto del corpo (i.e., $\boldsymbol{\varepsilon}(P)$), ci poniamo il problema di determinare se esistono direzioni lungo le quali si hanno solo dilatazioni e non scorrimenti angolari
- Questo significa cercare una direzione $d\mathbf{X}$ nell'intorno (elementare) del punto, tale che

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \lambda d\mathbf{X}$$

- Ricordando che in generale vale la relazione $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X}$, mettendo a sistema le due precedenti relazioni, otteniamo

$$\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{X} = \lambda d\mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}}$$

⋆ Cercare la direzione lungo la quale si hanno solo dilatazioni, equivale a risolve un **problema di autovalori !**

Direzioni principali di $\boldsymbol{\varepsilon}$ II

- Affinchè il problema di autovalori abbia una soluzione non banale, deve essere verificata la condizione:
$$\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \tag{7}$$
con $\mathbf{1}$ la matrice identità 3×3
- Problema 7 si riscrive nella forma:
$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{8}$$
dove:
$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned}$$
- I_1, I_2, I_3 sono degli scalari con una proprietà interessante: il loro valore non dipende dal sistema di riferimento

I_1, I_2, I_3 sono degli **invarianti** per il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$

Direzioni principali di $\boldsymbol{\varepsilon}$ III

- Il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ essendo un tensore ha un significato intrinseco $\rightarrow$ rappresenta la deformazione in un punto $\rightarrow$ quantità indipendente dal sistema di riferimento
- La rappresentazione matriciale o ingegneristica $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ di $\boldsymbol{\varepsilon}$ dipende dal sistema di riferimento
- Dato che gli invarianti I_1, I_2 e I_3 sono calcolati in funzione della rappresentazione matriciale $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ di $\boldsymbol{\varepsilon}$, si *potrebbe* concludere che anche essi dipendono dal sistema di riferimento $\rightarrow$ ERRATO !!

I_1, I_2, I_3 sono scalari il cui valore non dipende dal sistema di riferimento $\rightarrow$ **invarianti**

☐ **Esercizio.** Partendo dalla condizione 7, ricavare la forma degli invarianti.

Direzioni principali di $\boldsymbol{\varepsilon}$ I

- Essendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ simmetrico, equazione 7 ammette tre radici reali, λ_1, λ_2, λ_3,
- λ_1, λ_2, λ_3 sono gli autovalori di $\boldsymbol{\varepsilon}$ e prendono il nome di *dilatazioni principali*
- I corrispondenti autovettori, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, prendono il nome di *direzioni principali*

- Le dilatazioni principali rappresentano gli allungamenti massimi

☐ **Esercizio.** Si consideri un corpo piano di forma rettangolare e lati b e h nonchè un campo di spostamenti del tipo $\mathbf{u} = \{2b + 0.1bX, 2h\}^T$. Per il problema indicato si disegni la configurazione indeformata e la configurazione deformata del corpo, si calcoli il gradiente degli spostamenti $\mathbf{H}$, il tensore della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ nonchè i relativi autovalori ed autovettori.

☐ **Esercizio.** Ripetere l'esercizio di sopra per un campo di spostamenti del tipo: $\mathbf{u} = \{2b + 0.1bY, 2h\}^T$.

Stato piano di deformazione I

- **Stato piano di deformazione**: caratterizzato da avere tutte le componenti su una faccia uguale a zero. Quindi, fissato j,

$$\varepsilon_{ij} = 0 \qquad \text{for all} \qquad i = 1, 2, 3$$

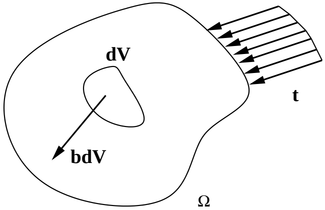
- Esempio

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Esempio: struttura infinitamente lunga, dotata di un piano di simmetria, caricata in modo simmetrico rispetto al piano di simmetria geometrica

Corpo deformabile: forze I

- **Tipologie di forze**
  - Forze distribuite superficiali $\quad \mathbf{t} \quad [\,\mathrm{F}\ \mathrm{L}^{-2}\,]$
  - Forze distribuite volumetriche $\quad \mathbf{b} \quad [\,\mathrm{F}\ \mathrm{L}^{-3}\,]$



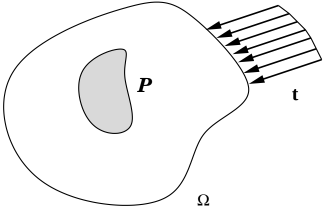
⋆ Non sono possibili forze concentrate
[in corrispondenza di una forza concentrata avrei uno spostamento infinito → fisicamente non accettabile]
⋆ Non sono ammesse coppie (!)

☐ **Esercizio.** Confronta e discuti le differenze tra le tipologie di forze per il caso di corpo rigido e per il caso di corpo deformabile

Corpo deformabile: statica I

- **Assiomi di equilibrio: statica**
  - Risultante delle forze agenti su ogni parte $\mathcal{P}$ del corpo Ω uguale a zero
  - Momento risultante delle forze agenti su ogni parte $\mathcal{P}$ del corpo Ω uguale a zero

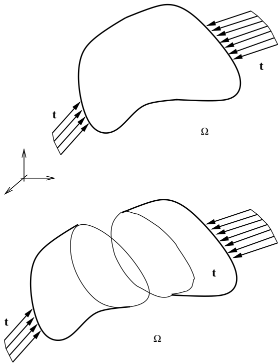
$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} dA = \mathbf{0} & \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega \\ \mathbf{M}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA = \mathbf{0} & \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega \end{cases}$$



  - ⋆ Equilibrio alla traslazione + equilibrio alla rotazione
  - ⋆ Forze contribuiscono all'equilibrio rotazionale
  - ⋆ Da definire le interazioni tra $\mathcal{P}$ e $\Omega \setminus \mathcal{P}$ $\Rightarrow$ **azioni interne**

Corpo deformabile: forze interne I

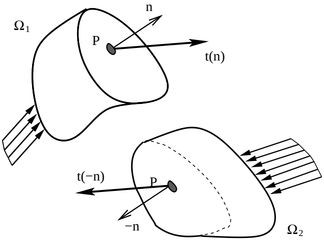
- **Forze interne:** azioni che parti diverse del corpo si scambiano
  - Dividiamo idealmente il corpo Ω in due parti, Ω_1 e Ω_2, attraverso una superficie Σ



  - Dato che $\Omega_1 \subset \mathcal{P}$ e $\Omega_2 \subset \mathcal{P}$, allora Ω_1 e Ω_2 devono soddisfare le equazioni di equilibrio alla traslazione

Corpo deformabile: forze interne I

- **Ipotesi:** azioni che due parti di corpo si scambiano attraverso una generica superficie possono essere al più forze superficiali $[FL^{-2}]$, funzioni del punto e della normale uscente dal corpo
- Indichiamo con $\mathbf{t_n}$ le azioni che il corpo Ω_2 induce sul corpo Ω_1
- Indichiamo con $\mathbf{t_{-n}}$ le azioni che il corpo Ω_1 induce sul corpo Ω_2



Forze interne/vettore tensione I

- Ricordando che Ω_1 e Ω_2 sono in equilibrio, e ponendo:

$$\partial\Omega_1 = \partial\mathcal{P}_1 \cup \mathbf{\Sigma} \qquad\qquad \partial\Omega_2 = \partial\mathcal{P}_2 \cup \mathbf{\Sigma}$$

  posso scrivere:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\Omega_1) = \displaystyle\int_{\Omega_1} \mathbf{b}dV + \int_{\partial\mathcal{P}_1} \mathbf{t}dA + \int_{\Sigma} \mathbf{t_n}dA = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(\Omega_2) = \displaystyle\int_{\Omega_2} \mathbf{b}dV + \int_{\partial\mathcal{P}_2} \mathbf{t}dA + \int_{\Sigma} \mathbf{t_{-n}}dA = \mathbf{0} \end{cases}$$

- Sommiamo le due equazioni di equilibrio:

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \mathbf{b}dV + \int_{\partial\mathcal{P}_1\cup\partial\mathcal{P}_2} \mathbf{t}dA + \int_{\Sigma} \left[\mathbf{t_n} + \mathbf{t_{-n}}\right] dA = \mathbf{0} \qquad (9)$$

- Notando che:

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \qquad\qquad \partial\mathcal{P}_1 \cup \partial\mathcal{P}_2 = \partial\Omega$$

  e ricordando che l'intero corpo Ω è in equilibrio, l'equazione 9 diventa:

$$\int_{\Sigma} \left[\mathbf{t_n} + \mathbf{t_{-n}}\right] dA = \mathbf{0}$$

Forze interne/vettore tensione I

- Attesa l'arbitrarietà della superficie Σ, l'argomento dell'integrale deve essere nullo
- Vale quindi il principio di azione e reazione, ovvero:

$$\boxed{\mathbf{t_n} = -\mathbf{t_{-n}}} \tag{10}$$

- Il vettore $\mathbf{t_n}$ prende il nome di **vettore delle tensioni** e dipende dal punto P e da un vettore $\mathbf{n}$
- Il vettore $\mathbf{t_n}$ rappresenta la forza per unità di superficie trasmessa tra due parti di corpo nel punto P attraverso una superficie ideale passante per P e di normale $\mathbf{n}$

☐ **Esercizio.** Si dimostri nel dettaglio Equazione 10, partendo dalle condizioni di equilibrio delle parti Ω_1 e Ω_2 ($\mathbf{R}(\Omega_1) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}(\Omega_2) = \mathbf{0}$).

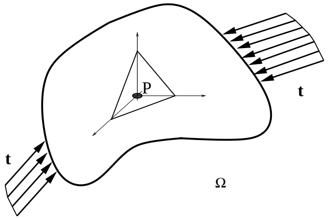
Teorema del tetraedro I

Vogliamo studiare la legge di variazione di $\mathbf{t_n}$ con $\mathbf{n}$

- Prendiamo in esame un tetraedro retto $\mathcal{T}$ interno al corpo ed un sistema di riferimento con origine nel vertice dell'angolo retto
- Indichiamo con ε_1, ε_2, ε_3 le lunghezze dei lati del tetraedro, con a_i le aree di normale $-\mathbf{e}_i$, con v il volume. Risulta:

$$a_i = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i)\, a_n$$
$$v = \frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

con $\mathcal{E}_{ijk}$ il simbolo alternatore



Teorema del tetraedro I

- Consideriamo l'equilibrio del tetraedro:

$$\int_v \mathbf{b} dv + \sum_{i=1}^{3} \int_{a_i} \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_i} da + \int_{a_n} \mathbf{t}_\mathbf{n} da = \mathbf{0}$$

- Indichiamo con $< \cdot >$ il valor medio della funzione ed applicando il teorema sul valor medio:

$$v < \mathbf{b} > + \sum_{i=1}^{3} a_i < \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_i} > + a_n < \mathbf{t}_\mathbf{n} > =$$

$$v < \mathbf{b} > + \sum_{i=1}^{3} a_n \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i\right) < \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_i} > + a_n < \mathbf{t}_\mathbf{n} > = \mathbf{0}$$

- Dividiamo per a_n, facendo il limite per $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ a zero:

$$\mathbf{t}_\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{3} \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i\right) \mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} = \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} \otimes \mathbf{e}_i\right) \right] \mathbf{n}$$

Il vettore trazione relativo alla generica superficie di normale n è funzione dei vettori trazione relativi alle superfici di normale $\mathbf{e}_i$

Tensore delle tensioni I

- La relazione di dipendenza di $\mathbf{t}_\mathbf{n}$ da $\mathbf{n}$ può essere espressa come:

$$\boxed{\mathbf{t}_\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} \tag{11}$$

dove:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^{3} (\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} \otimes \mathbf{e}_i)\right]}$$

- Dipendenza lineare da $\mathbf{n}$ attraverso un tensore del 2^o ordine, $\boldsymbol{\sigma}$, detto **tensore delle tensioni** o **tensore di Cauchy**.
- Noto $\boldsymbol{\sigma}$ in un punto, posso calcolare il vettore tensione in ogni direzione $\rightarrow$ $\boldsymbol{\sigma}$ contiene in sè tutte le informazioni relative allo stato tensionale nel punto

☐ **Esercizio.** Si riportino ipotesi, tesi e dimostrazione del teorema del valor medio di una funzione reale.

☐ **Esercizio.** Si dimostri nel dettaglio il teorema del tetraedro

Tensore delle tensioni II

- Ricordiamo come si estraggono le componenti di un tensore

$$A_{ab} = \mathbf{A}\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_a$$

- Partendo dalla definizione del tensore delle tensioni possiamo dimostrare

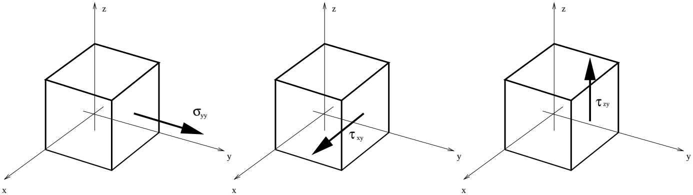
$$\boxed{\sigma_{ab} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_a}$$

★ Componente *ab* del tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$: a-esima componente del vettore trazione agente sulla faccia di normale uscente $\mathbf{e}_b$

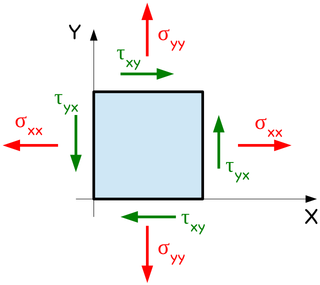
★ Precisa convenzione sul segno positivo delle tensioni: componente positiva se diretta secondo gli assi sulla faccia di normale uscente positiva

Tensore delle tensioni III

- Three-dimensional vision



- Two-dimensional vision



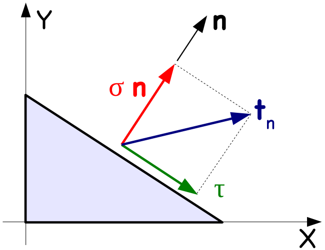
Tensore delle tensioni IV

- Dato un vettore trazione $\mathbf{t_n}$ posso sempre decomporlo come segue:
  - componente normale alla faccia, ovvero in direzione $\mathbf{n}$, definita come

$$\sigma\mathbf{n} = (\mathbf{t_n} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$$

  - componente tangenziale, ovvero giacente sulla faccia

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t_n} - \sigma\mathbf{n}$$



Tensore delle tensioni V

- **Notazione compatta:**

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^{3} (\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} \otimes \mathbf{e}_i) \right]$$

- **Notazione indiciale:**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \qquad \text{con} \qquad \sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{e}_j}$$

- **Notazione ingegneristica:**

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \left[\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} \middle|\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2} \middle|\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3} \right]$$

Equilibrio in forma puntuale I

Vogliamo scrivere equilibrio in forma differenziale

- Scriviamo equazione di **equilibrio alla traslazione** in forma integrale

$$\mathbf{R}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} dA = \mathbf{0} \qquad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega$$

- Scriviamo equazione di equilibrio alla traslazione in forma integrale utilizzando risultato del teorema del tetraedro

$$\mathbf{R}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = \mathbf{0} \qquad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega$$

- Riscriviamo il tutto in notazione indiciale

$$R_i(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} b_i dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \sigma_{ij} n_j dA = 0 \qquad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega$$

- Utilizziamo il teorema della divergenza trasformando l'integrale di superficie in un integrale di volume

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \sigma_{ij} n_j dA = \int_{\mathcal{P}} \sigma_{ij,j} dV$$

Equilibrio in forma puntuale II

- L'equazione di equilibrio diventa

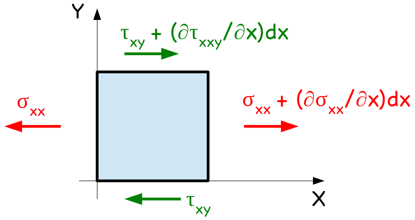
$$R_i(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} (b_i + \sigma_{ij,j})\, dV = 0 \qquad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega$$

- Sfruttando l'arbitrarietà nella scelta di $\mathcal{P}$ otteniamo l'equazione puntale e non più integrale

$$\boxed{\sigma_{ij,j} + b_i = 0} \qquad \forall P \in \Omega$$

Equilibrio in forma puntuale III

- Possibile derivare la forma differenziale dell'equilibrio alla traslazione anche in modo più "diretto"
- Consideriamo un caso piano



- Consideriamo l'equilibrio alla traslazione in direzione X

$$\left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right] A_x - \sigma_{xx} A_x + \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right] A_y - \tau_{xx} A_y + b_x V = 0$$

indicando con A_x e A_y le aree di normale x e y rispettivamente e con V il volume dell'elemento da equilibrare

Equilibrio in forma puntuale IV

- Semplificando otteniamo

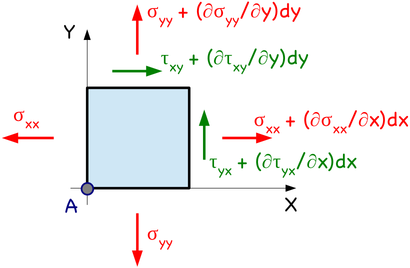
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx A_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy A_y + b_x V = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dydx + b_x dxdy = 0$$

- Dividendo tutti i membri per *dxdy* otteniamo

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0}$$

Equilibrio in forma puntuale V

- Possibile derivare la forma differenziale dell'equilibrio alla rotazione anche in modo più "diretto"
- Consideriamo un caso piano



- Consideriamo l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A

$$-\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx A_x\right]\frac{dy}{2}+\left[\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy A_y\right]\frac{dx}{2}+$$

$$-\left[\left(\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy\right)A_y\right]dy+\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}dx\right)A_x\right]dx-\left[b_x V\right]\frac{dy}{2}+\left[b_y V\right]\frac{dx}{2}=0$$

Equilibrio in forma puntuale VI

- Eliminando gli infinitesi di ordine superiore otteniamo

$$-\left[\tau_{xy} A_y\right] dy + \left[\tau_{yx} A_x\right] dx = -\tau_{xy} dxdy + \tau_{yx} dydx = 0$$

- Dividendo l'ultima equazione per *dxdy* otteniamo:

$$\boxed{-\tau_{xy} + \tau_{yx} = 0}$$

ovvero una prima componente per la simmetria del tensore delle tensioni

Corpo deformabile: equilibrio I

Equazioni indefinite di equilibrio

- Notazione compatta
  - Equazioni di campo

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in} \quad \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

  - Condizioni al contorno

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{su} \qquad \partial\Omega_f \subseteq \partial\Omega$$

- Notazione ingegneristica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{cases}$$

Tensore delle tensioni: direzioni principali I

- Dato lo stato tensionale in un punto del corpo (i.e., $\boldsymbol{\sigma}(P)$), ci poniamo il problema di determinare se esistono piani (individuati da una direzione uscente) sul quale sono presenti solo tensioni normali, dirette quindi nella direzione della normale uscente

$$\mathbf{t_n} = \alpha \mathbf{n}$$

- Ricordando che in generale vale la relazione $\mathbf{t_n} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, mettendo a sistema le due precedenti relazioni, otteniamo

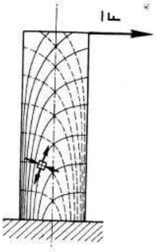
$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \alpha \mathbf{n}}$$

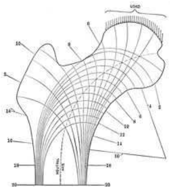
★ Cercare la direzione lungo la quale si hanno solo tensioni normali, equivale a risolve un problema di autovalori !

Tensore delle tensioni: direzioni principali II

★ Le direzioni principali di tensione (ovvero le direzioni lungo la quale si hanno solo tensioni normali) coincidono anche con le direzioni di sforzo "massimo" e "minimo"

- Immaginiamo di indicare in ogni punto le (tre) direzioni principali. Il loro inviluppo definisce (tre) famiglie di curve mutuamente ortogonali (**linee ipostatiche**). Per costruzione sulle giaciture normali alle ipostatiche c'è solo tensione normale. Inoltre lungo le ipostatiche vi sono tensioni massime e minime.
- Strutture con nervature disposte secondo le ipostatiche, e quindi rinforzate secondo le direzioni in cui gli sforzi sono più gravose, si trovano in natura e nelle opere di alcuni architetti.



Stato piano di stress I

- **Stato piano di stress**: caratterizzato da avere tutte le componenti su una faccia uguale a zero. Quindi, fissato j,

$$\sigma_{ij} = 0 \qquad \text{for all} \qquad i = 1, 2, 3$$

- ◦ Esempio

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ◦ Esempio: struttura sottile caricata solo nel piano

□ **Esercizio.** Calcolare direzioni e tensioni principali per i seguenti tre stati di stress

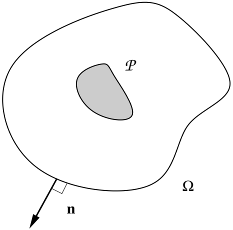
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dopo averle calcolate, disegnare le azioni principali.

Corpo deformabile: dinamica/inerzia I

- Caso dinamico ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) $\rightarrow$ resistenza del corpo a cambiare configurazione
- **Definizione di massa/inerzia**
  - ⋆ **densità di massa** ρ (funzione del punto)
  - ⋆ massa del corpo Ω o di una parte del corpo $\mathcal{P} \in \Omega$:

$$m = m(\Omega) = \int_\Omega \rho dA \qquad\qquad m(\mathcal{P}) = \int_\mathcal{P} \rho dA$$



Misura della quantità di materiale in Ω o in $\mathcal{P} \subseteq \Omega$

Corpo deformabile: equilibrio dinamico I

- **Assiomi di equilibrio: dinamica**

  Equazioni di Newton [assiomi di equilibrio]

  - Risultante delle forze agenti su una parte $\mathcal{P}$ dell'intero corpo uguale alla variazione di quantità di moto della parte $\mathcal{P}$
  - Momento risultante delle forze agenti su una parte $\mathcal{P}$ dell'intero corpo uguale alla variazione del momento di quantità di moto della parte $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathcal{P}) = \dfrac{d\mathbf{Q}(\mathcal{P})}{dt} \\ \mathbf{M}(\mathcal{P}) = \dfrac{d\mathbf{K}_0(\mathcal{P})}{dt} \end{cases}$$

dove:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathcal{P}) = \displaystyle\int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} dA \\ \mathbf{M}(\mathcal{P}) = \displaystyle\int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathcal{P}) = \displaystyle\int_{\mathcal{P}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV \\ \mathbf{K}(\mathcal{P}) = \displaystyle\int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV \end{cases}$$

Corpo deformabile: dinamica I

Si dimostra:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Q}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV\right] & = \displaystyle\int_\Omega \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\, dV \\ \dfrac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV\right] & = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{x} \times \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\, dV \end{cases} \tag{12}$$

dato che $\mathbf{x}$ e ρ sono funzioni solo del punto e non del tempo

- ☐ **Esercizio.** Verificare analogie e differenze con il caso del punto materiale
- ☐ **Esercizio.** Verificare analogie e differenze con il caso del corpo rigido
- ☐ **Esercizio.** Dimostrare relazione 12.