Impostazione Variazionale del Modello Elastoplastico

Dario C. S. Mazzoleni

Equazioni per Materiali Elastoplastici: un'Impostazione Variazionale

Dario C. S. Mazzoleni

10 Maggio 2010

Ipotesi Restrittive del Modello

1. Temperatura costante;
2. Indipendenza dalla velocità (comportamento quasistatico);
3. Incomprimibilità plastica.

Supponiamo che il corpo oggetto di studio sia identificato con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato e con frontiera Lipschitziana.

Variabili Cinematiche

- Spostamento: $\mathbf{u}$;
- Deformazione (*strain*): ε;
- Deformazione plastica: $\mathbf{p}$;
- Deformazione elastica: $\boldsymbol{e} = \varepsilon - \boldsymbol{p}$;
- Variabili interne: $\xi = \xi_1, ..., \xi_m$;
- Deformazione plastica generalizzata: $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}, \xi)$.

Variabili Dinamiche

- Tensione (*stress*): $\boldsymbol{\sigma}$;
- Forze interne coniugate: $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, ..., \chi_m)$;
- Tensioni generalizzate: $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$.

Funzioni Scalari

- Energia libera: $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \psi^e(\boldsymbol{e}) + \psi^p(\boldsymbol{\xi})$;
- Funzione di sfibramento (*yield function*): $\phi(\boldsymbol{\Sigma})$.

Incognite per il Problema Primale

Le incognite del Problema sono:

- $\mathbf{u}$;
- $\mathbf{p}$;
- $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_m$.

In questo senso diremo che il Problema da noi trattato è *Primale* e si parlerebbe di Problema *Duale* se invece le incognite fossero le tensioni.

Equazioni del Problema Primale

Equazione dell'equilibrio

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Equazioni del Problema Primale

Equazione dell'equilibrio

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Tensore di Green-Lagrange Linearizzato

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(D\mathbf{u} + (D\mathbf{u})^T) \tag{2}$$

Equazioni del Problema Primale

Equazione dell'equilibrio

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Tensore di Green-Lagrange Linearizzato

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(D\mathbf{u} + (D\mathbf{u})^T) \tag{2}$$

Relazioni Costitutive

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}(\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{p}) \tag{3}$$

$$\chi = -\boldsymbol{H}\xi \tag{4}$$

Legge di Flusso

Consideriamo la funzione di dissipazione D che deve essere convessa, non negativa, positivamente omogenea (di grado 1), s.c.i. e $D(0) = 0$. Sia $K_p = \mathrm{dom}(D)$. La legge di flusso assicura che $(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \in K_p$ e inoltre, per ogni $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta} \in K_p$:

$$D(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta}) \geq D(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{q} - \dot{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{\chi} : (\boldsymbol{\eta} - \dot{\boldsymbol{\xi}}) \tag{5}$$

Dati Iniziali e al Bordo

- Condizione di Dirichlet omogenea: $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$;
- Condizione iniziale: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{0}$.

Spazi Funzionali

1. $V = [H_0^1(\Omega)]^3$ Spazio degli spostamenti $\mathbf{u}$;
2. $Q = \{\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{3\times 3} \mid q_{ij} = q_{ji} \in L^2(\Omega)\}$;
3. $Q_0 = \{\boldsymbol{q} \in Q \mid \mathrm{tr}\boldsymbol{q} = 0 \ q.o. \ in \ \Omega\}$
   Spazio delle deformazioni plastiche $\mathbf{p}$;
4. $M = [L^2(\Omega)]^m$ Spazio delle variabili interne $\boldsymbol{\xi}$;
5. $Z = V \times Q_0 \times M$ e
   $Z_p = \{\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta}) \in Z \mid (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta}) \in K_p \ q.o. \ in \ \Omega\}$.

Funzionali e Forme Bilineari

Siano $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta}) \in Z$.

- $a \colon Z \times Z \to \mathbb{R}$;

$$a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \int_\Omega [\boldsymbol{C}(\varepsilon - \boldsymbol{p}) : (\varepsilon(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{H}\boldsymbol{\eta}] \, dx$$

- $\boldsymbol{b}(t) \colon Z \to \mathbb{R}$;

$$\langle \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{z} \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{v} \, dx$$

- $j \colon Z_p \to \mathbb{R}$;

$$j(\boldsymbol{z}) = \int_\Omega D(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\eta})$$

Problema Primale in Forma Variazionale

Dato $\boldsymbol{b} \in H^1(0, T; Z^*)$, $\boldsymbol{b}(0) = \mathbf{0}$, trovare $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi})\colon [0, T] \to Z$ con $\boldsymbol{w}(0) = \mathbf{0}$ tale che per q.o. $t \in (0, T)$, $\dot{\boldsymbol{w}}(t) \in Z_p$ e valga:

$$a(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{z} - \dot{\boldsymbol{w}}(t)) + j(\boldsymbol{z}) - j(\dot{\boldsymbol{w}}(t)) \geq \langle \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{z} - \dot{\boldsymbol{w}}(t) \rangle, \quad (6)$$

per ogni $\boldsymbol{z} \in Z_p$.

Well Posedness di una PDE

- Esistenza;
- Unicità;
- Dipendenza continua dai dati (o Stabilità);
- Regolarità della soluzione.

Riferimenti bibliografici

Weimin Han, B. Daya Reddy
Plasticity. Mathematical Theory and Numerical Analysis
Springer-Verlag, 1999